MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Számitástechnikai Központja
Gazdasági Alkalmazások Osztálya

KORNAI JÁNOS - LIPTÁK TAMÁS:

"K É T S Z I N T Ü" T E R V E Z É S

Matematikai programozási módszer a népgazdasági terv javitására

B u d a p e s t

1962, május

TARTALOMJEGYZÉK

B E V E Z E T É S

A Magyar Tudományos Akadémia Számitástechnikai Központjában 1962-ben munkacsoport alakult azzal a feladattal, hogy javaslatokat dolgozzon ki matematikai módszerek alkalmazására a népgazdasági tervezésben. Tanulmányunk e munkacsoport első terméke.

Jelen beszámoló fő célja: megismertetni a tervezés egy uj eszközét a gyakorlati tervezőkkel, közgazdászokkal. Ezért a tanulmány 1-5. fejezetét, amelyek elgondolásaink közgazdasági vonatkozásait irják le, ugy fogalmaztuk meg, hogy feldolgozható legyen nagyobb matematikai felkészültség nélkül is. Kizárólag azt feltételeztük, hogy az olvasó ismeri a lineáris programozással kapcsolatos alapfogalmakat.

A kérdés matematikai vonatkozásait, a javasolt programozási eljárással kapcsolatos matematikai tételeket és azok bizonyitását a 6. fejezetben közöljük.

Javaslatainkat azzal a meggondolással terjesztjük elő, hogy azok - nézetünk szerint - felhasználhatók lesznek a harmadik ötéves népgazdasági terv, valamint a huszéves terv kidolgozásához.

Ezen a helyen szeretnénk köszönetet mondani munkacsoportunk másik két tagjának, Martos Bélának és Nagy Andrásnak; a velük folytatott megbeszélések nagyban elősegitették javaslataink kialakitását. Köszönettel tartozunk Gerő Máriának és Morva Tamásnak, az Országos Tervhivatal munkatársainak, akik a tanulmány egy korábbi [13] változatához szóltak hozzá, s hasznos észrevételekkel vitték előbbre munkánkat.

I. A JAVASLAT KÖZGAZDASÁGI ALAPGONDOLATAI

Modellünket ugy szerkesztettük meg, hogy az lehetőség szerint idomuljon a tervezés mai gyakorlatához; a jelenleg szokásos tervezési módszerek mélyreható változtatása nélkül is beépülhessen a népgazdasági terv kidolgozásának normális menetébe.

A következő közgazdasági alapgondolatokból indultunk ki:

1. Modellünkkel bizonyos fokig imitáljuk a tervezés szokásos menetét. Az Országos Tervhivatal a gazdaságpolitikai követelmények, s az ágazatokra vonatkozó általános ismeretek alapján kidolgoz egy előzetes tervjavaslatot, amely globális előirányzatokat, "keretszámokat" tartalmaz az ágazatok számára. Az ágazatok saját részletes számitásaikkal, konkrét adottságaik alapján "kitöltik" ezeket a kereteket, konkretizálják a központi előirányzatokat. Eközben módositásokat is ajánlanak a Tervhivatal számára. A gazdasági életben ezt nevezik "visszatervezésnek". A visszatervezés alapján a Tervhivatal módositja eredeti előirányzatait, ezeket ujra leküldi az ágazatoknak. Modellünk az "oda-vissza-tervezésnek" ezt a processzusát formalizálja.*

2. Modellünk egy más szempontból is a tervezés szokásos gyakorlatának imitációját jelenti. Rendszeresen megtörténik, hogy a központ bizonyos direktivákat ad az ágazatoknak és kéri annak visszajelentését: milyen gazdasági hatékonysággal oldható meg a feladat. Az ágazatok különböző - központilag előirt szerkezetü - "gazdaságossági mutatószámokkal" fejezik ki tevékenységük hatékonyságát. Modellünk egységes rendszerbe foglalja ezt a visszajelentést: az ágazatok az eljárás minden lépésében gazdaságossági mutatószámokat jelentenek vissza a központnak az onnét kapott direktivák, valamint saját tevékenységük értékelésére.

3. Korábban már sor került egyes iparágakban ágazati méretü távlati tervek kidolgozására matematikai programozási módszerekkel, illetve

- - - - - - - - - -

* A gyakorlatban ez az "oda-vissza-processzus" nem megy végbe ilyen szigoru időrendi sorrendben. Sokszor kerül sor "menetközbeni" tárgyalásokra, információk kicserélésére, részmegállapodásokra, tervszámok emelése, vagy csökkentése körüli alkukra és egyeztetésekre.

folyamatban van ilyen programok számitása.* E programozások valósággal sugalják azt a gondolatot, hogy bizonyos ágazati számitási eredményeket érdemes lenne összehasonlitani s felhasználni azoknak a direktiváknak, keretszámoknak /például termelési feladatoknak, beruházási kereteknek/ a javitására, amelyeket az ágazati számitások során a népgazdasági tervből vettek át. Modellünk hivatása: szervezett formát adni ennek az összehasonlitásnak és az ennek alapján történő népgazdasági tervkorrekcióknak.

4. Nem kivánjuk modellünk segitségével meghatározni a népgazdasági terv minden előirányzatát. Kiindulópontunk: egy már kidolgozott /"hagyományos", nem-matematikai módszerekkel meghatározott, esetleg az input-output táblával ellenőrzött/ népgazdasági terv. Ennek a tervnek bizonyos előirányzatait konstansként átvesszük programozási modellünkbe. Ezeket dolgozatunkban gazdaságpolitikai előirásoknak nevezzük. Ilyenek pl. a munkaerő-keret, a személyes és közületi fogyasztásra szolgáló termékek mennyiségének és összetételének előirányzatai stb./ Más kérdés, hogy számitásunk eredményei alapján mód van e konstansként átvett gazdaságpolitikai előirások értékelésére is: támpontokat adhatunk az előirások esetleges megváltoztatására irányuló döntéshez./

5. Ma már bevett gyakorlat, hogy gazdaságossági számitásokat kell végezni rövidlejáratu külkereskedelmi döntéseknél, valamint az egyes létesitményekre vonatkozó beruházási döntéseknél. A gazdaságossági szemléletnek azonban át kell hatnia a távlati népgazdasági tervezés metodikáját is. Ezért olyan módszert igyekeztünk kidolgozni, amely képes érzékelni az egyes ágazatok fejlesztésének relativ előnyeit és hátrányait s az adott erőforrások legcélszerübb felhasználására késztet. A módszer hivatása arra orientálni a tervezőket, hogy megkeressék a nemzetközi munkamegosztásba való legelőnyösebb beilleszkedést. A távlati tervezésben sem elégedhetünk meg tehát csupán azzal, hogy elejét vesszük az aránytalanságoknak s elfogadható technikai szinvonalat biztositunk, hanem ennél a tervezési feladatnál is - a lehetőségekhez képest - optimalizálásra, gazdaságossági kritériumok érvényesitésére kell törekedni.

- - - - - - - - - - - - -

* Lásd irodalomjegyzék [12], [11] és [15].

6. Köztudomásu, hogy e számitásokban felhasznált alapadatok egy része bizonytalan; a modell eleve bizonyos egyszerüsitő feltevéseket alkalmaz; az eredeti tervből konstansként átvett gazdaságpolitikai előirások nagysága is sok szempontból vitatható. Éppen ezért érthető, ha a gyakorlati tervezők nem tulajdonitanak tulzott jelentőséget a matematikai értelemben "optimális", azaz a szélsőértékfeladatot egzaktan teljesitő program elérésének, mert tisztában vannak ennek az optimumnak a viszonylagos voltával. Gyakorlati célokra tehát teljesen elégséges az optimum elfogadható közelitése.

7. Olyan eljárást kivántunk kidolgozni, amely a jelen és a nem tul távoli jövő számitástechnikai lehetőségei mellett gyakorlatilag alkalmazható. Modellünk szerint olyan méretü programozásokat kell elvégezni, amelyekhez hasonlóakat, mint emlitettük, egyes iparágakban, pl. a pamutiparban, a müszáliparban, az aluminiumiparban már ténylegesen végeztek, illetve végeznek, magyarországi elektronikus számológépekkel.

2. DINAMIKUS NÉPGAZDASÁGI TERVEZÉSI MODELL

A tanulmányban előterjesztett programozási módszer sokféle célra, sokféle feladat megoldására alkalmas. Annak érdekében azonban, hogy olvasóink könnyebben áttekinthessék elgondolásainkat, célszerünek látszik mindjárt egy gyakorlati tervezési problémán bemutatni módszerünket. Ezért ebben a fejezetben részletesen leirunk egy modellt, amely a népgazdasági távlati fejlesztési terv megalapozását hivatott szolgálni. Később, a 4. fejezetben utalunk arra, hogy milyen más feladatok megoldásához használható ugyanez a módszer.

2.1 A központi program változói és feltételei

A tervezést a központ /gyakorlatilag: a kormány, az Országos Tervhivatal/ irányitja. A tervezéssel kapcsolatos feladatok egy részét a központ alá rendelt szektorok látják el. Összesen n szektorunk van. Egy-egy szektor egy-egy termékcsoportért felelős. /A szektorhoz sorolt termékek csoportjának szélességét, azaz az aggregáció problémáját később tárgyaljuk./ A továbbiakban a rövidség kedvéért termékcsoport helyett termékről beszélünk majd. A szektor tevékenységeihez tartozik nemcsak a szóbanforgó termék hazai termelése és a termeléshez szükséges beruházás, hanem e termék exportja és importja is. A szektor felelős a termék iránti hazai és exportszükséglet kielégitéséért, akár hazai termelésből, akár importból történjék is ez.

Távlati tervet dolgozunk ki egy tervperiódusra, amely összesen T időszakból áll.

A központi program és a szektorprogramok között meghatározott összefüggések állnak fenn. Vizsgáljuk meg előbb a központi programot. A központ háromféle központi előirást ad a szektorok részére:

A központ megbizza az i-edik szektort, hogy a t-edik időszakban bizonyos mennyiségü terméket bocsásson a hazai szükségletek rendelkezésére.* Ezt z_{it}-vel jelöljük s ellátási feladatnak nevezzük / $i = 1, \ldots, n; \; t = 1, \ldots, T$ /. A központ nem irja elő, hogy ezt a feladatot a szektor hazai termelés, vagy import utján elégitse ki; ezt majd a szektor-program határozza meg. Az ellátási feladat teljesitésével csupán a hazai szükségletet kell kielégiteni; a szektor-programban kell majd meghatározni, hogy ezen felül kiván-e a szektor exportálni is.

A központ rendelkezésre bocsát az i-edik szektornak a t-edik időszakban egy meghatározott mennyiséget a j-edik termékből /Például meghatározott mennyiségü villamosenergiát ad a vegyiparnak az 1964-65 időszakra/. Ezt z_{ijt}-vel jelöljük és anyagkeretnek nevezzük / $i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n; \; t = 1, \ldots, T$ /. Ez tartalmazza mind a hazai termelésü, mind az importált i-edik anyagot.

A központ az i-edik szektor rendelkezésére bocsát a t-edik időszakra meghatározott létszámot. Ezt w_{it}-vel jelöljük és létszámkeretnek nevezzük / $i = 1, \ldots, n; \; t = 1, \ldots, T$ /. Mint látni fogjuk, dinamikus népgazdasági modellünkben a munkaerőt tekintjük egyedüli primér központi erőforrásnak.

A központ által a szektoroknak adott háromféle előirás /z_{it}, z_{jit}, és w_{it}/ a központi program változói, amelyeknek nagyságát számitásunk eredményeképpen kivánjuk meghatározni.

- - - - - - - - - -

* A termékmennyiséget általában forintban kell mérni, tekintettel arra, hogy egy-egy szektor termelése rendszerint elég heterogén. A modell elég mély tagolása esetén lehetnek szektorok, amelyekben természetes mértékegység is alkalmazható. /Pl. kWó, áram, pár cipő, stb./

A központi programnak a következő korlátozó feltételeket kell kielégitenie:

$$z_{it} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} z_{jit} + Q_{it} \qquad /i=1,\ldots,n; \; t=1,\ldots,T/, \qquad /2.1/$$

ahol Q_{it} a t-edik időszakban az i-edik termékből szükséges extern fogyasztás. Ez gazdaságpolitikai előirás, azaz olyan adat, melyet nem magunk számitunk ki a programozás során, hanem korábbi tervszámitásokból konstansként vesszük át. Az extern fogyasztás magában foglalja a személyes és a közületi fogyasztást. Ezzel szemben általában nem foglalja magában sem az exportot, sem a beruházások céljaira történő felhasználást.* Az exportot és a beruházási tevékenységet ugyanis nem tekintjük gazdaságpolitikai előirásnak, hanem azok célszerü nagyságát számitásunk segitségével kivánjuk meghatározni.

A /2.1/ feltétel a népgazdasági tervezés gyakorlatában rendszeresen alkalmazott termékmérleg: baloldalon a forrás, jobboldalon a felhasználás. A hazailag termelt és importált termékből a hazai szükséglet rendelkezésére bocsátott mennyiség $/z_{it}/$ nem lehet kevesebb, mint amennyit a hazai termelőfogyasztás $/\sum_{i \neq j} z_{jit}/$ és az extern fogyasztás $/Q_{it}/$ igényel.

A /2.1/ feltétel-rendszer nem más, mint annyi n-szektoros input-output tábla, ahány időszakunk van. Ezekből az ágazati kapcsolati mér-

- - - - - - - -

* Ez alól van kivétel, amelyre később térünk ki.

legekből azonban, mint látni fogjuk, nem számitunk technológiai együtthatókat s ennek megfelelően nem használjuk fel az input-output analizis szokásos eljárásai szerint. Ez kizárólag abszolut összegekben megadott mérlegek formájában szerepel modellünkben.

Az ismertetésre kerülő eljárás alkalmazhatósága érdekében felső korlátot kell szabnunk minden szektor ellátási feladatának:

$$/2.2/ \quad z_{it} \leqq Z_{it} \; / > Q_{it}/ \qquad /i=1,\dots,n; \; t=1,\dots,T/,$$

ahol a Z_{it} felső korlát önkényesen meghatározott konstans. Megszabása azonban nem okoz különösebb nehézséget a gyakorlatban. A gyakorlati tervezők a helyzet ismerete alapján könnyen megállapithatnak minden termékre olyan felső határt, amelyet a hazai szükséglet biztosan, semmilyen körülmények között nem lép tul. Igy például vitatható, hogy 1975-ben 200.000, vagy 700.000 to lesz-e a papirfogyasztás /a termelőfogyasztás és az externfogyasztás együttesen/, de egészen biztos, hogy 1 millió to-nál nem lesz több.*

A következő feltétel:

$$/2.3/ \quad \sum_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \qquad / t=1,\dots,T/,$$

ahol W_t a népgazdasági munkaerőkeret a t-edik időszakban. Ez gazdaságpolitikai előirás, amelyet korábbi tervszámitásokból konstansként veszünk át.

- - - - - - - - -

* Z_{it} nagysága magát a programot végső soron nem befolyásolja, csupán a programozási eljárás során alkalmazott iteráció sebességére gyakorol befolyást.

A /2.3/ feltétel a népgazdasági tervezés gyakorlatában ugyancsak jól ismert munkaerő-mérleg.

Természetesen a központi program változói nem lehetnek negatívak:

$$/2.4/ \quad z_{it} \geqq 0$$

$$/2.5/ \quad z_{ijt} \geqq 0 \qquad /i=1,\dots,n; \; j=1,\dots,n; \; t=1,\dots,T/,$$

$$/2.6/ \quad w_{it} \geqq 0$$

A központi program megengedett, ha a /2.1/ - /2.6/ feltételrendszert teljesiti.

2.2 A szektor-programok változói és feltételei

Az i-edik szektor programozási modelljében szereplő tevékenységek /változók/ közgazdasági természetük szerint több csoportba sorolhatók:

1. Reprodukáló tevékenységek. Ezen a tervperiódus kezdetén már fennálló, az i-edik terméket kibocsátó kapacitások változatlan továbbmüködtetését értjük. Technikai jellemzők alapján /például elmaradottabb vagy fejlettebb üzem/ több ilyen tevékenység épithető be a modellbe.

A k-adik reprodukáló tevékenység volumene a t-edik időszakban x_{ikt} /k = repr*, t = 1,...,T/. A volumen mértékegysége: az előálli-

- - - - - - - -

* Itt és a szektorváltozók többi csoportjainál nem adjuk meg a változók számát, hanem ehelyett a k futóindexet illetően a tevékenység jellegére utalunk egy-egy röviditéssel.

tott termékmennyiség mérésére alkalmas természetes mértékegység pro 1 időszak, vagy Ft pro 1 időszak. /Azonos azzal a mértékegységgel, amelyyel az i-edik terméket a rávonatkozó központi termékmérlegben mérjük./

2. Beruházási tevékenységek. Ebbe a fogalomkörbe soroljuk nemcsak az uj kapacitás megteremtését, hanem az uj kapacitáson folyó termelést is.

Technikai vagy gazdasági jellemzők alapján /pl. alkalmazott technológia, import vagy hazai gépek stb./ több ilyen tevékenység épithető be a modellbe.

A k-adik beruházási tevékenység volumene x_{ik} /k = inv/. A tevékenység volumenét a már üzembehelyezett, s normálisan termelő kapacitás méretével, e kapacitáson egy időszak alatt termelt i-edik termék mennyiségével mérjük. Ennek megfelelően a mértékegység azonos a reprodukáló tevékenységnél termékmennyiség mérésére használt természetes mértékegységgel, vagy Ft-tal, pro 1 időszak.

Ellentétben a reprodukáló tevékenységekkel /és az alábbiakban ismertetésre kerülő export- és importtevékenységekkel/, a beruházási tevékenység nem egyetlen időszak alatt zajlik le, hanem az egész tervidőszak során. Ennek megfelelően nem is szerepel az x_{ik} volumen mellett, harmadik indexként, a "t".

Lehetséges, hogy egyes szektorokban választhatunk valamely beruházási tevékenység megkezdésének többféle időpontja között. Pl. az 1., a 2. vagy a 3. időszakban kezdhetjük meg egy meghatározott uj gyár épitését. Ezesetben ezt a három lehetőséget három külön, önálló változóként állitjuk be modellünkbe.

3. Exporttevékenységek. Gazdasági jellemzők alapján /pl. piacok, relációk, stb. szerint/ többféle exporttevékenység szerepelhet a modellben. Az i-edik termékből a t-edik időszakban lebonyolított k-adik exporttevékenység volumene x_{ikt} /k = exp, t = 1,...,T/.

A tevékenység volumenét itt, valamint a 4. és 5. pont alatt tárgyalt külkereskedelmi tevékenységeknél a kivitt /ill. behozott/ termék mennyiségével mérjük; ugyanabban a mértékegységben, mint a reprodukáló tevékenységeknél.

4. Korlátos importtevékenységek. Ebben a csoportban csak olyan importtevékenységek szerepelnek, amelyek az 1. és 2. csoporthoz tartozó hazai termelőtevékenységekkel versenyeznek, azt pótolni képesek /kompetitiv import/, s amelyek volumenét valamilyen külső piaci tényező korlátozza. Gazdasági jellemzők alapján /pl. piacok stb./ többféle ilyen tevékenység szerepelhet a modellben. Az i-edik terméket a t-edik időszakban importáló k-adik korlátos importtevékenység volumene: x_{ikt} /k = imp, t = 1,...,T/.

5. Szabad importtevékenység. Ez olyan importtevékenység, amely a 4. csoportban szereplő import-tevékenységekhez hasonlóan versenyez a hazai termeléssel, azaz kompetitiv jellegü, de ugyanakkor volumenét sem külső piaci tényezők, sem egyéb adottságok nem korlátozzák. Egyes szektorokban joggal feltételezhetjük ilyen szabad importtevékenység reális létezését. Más szektorokban ilyen szabad, korlátlan import-tevékenység nem létezik. Mégis ezekben a szektorokban is szerepeltetjük a változóknak ezt a tipusát, annak tudatában, hogy ez csupán fiktiv változó. Látni fogjuk, hogy az alkalmazásra kerülő programozási eljárás automatikusan biztositja e változók kiszorula-

sát a programból, de módszerunk természete megköveteli ilyen felső korlát nélküli import-változó szerepeltetését minden szektor-modellben. A szabad import volumene a t-edik időszakban: x_{i0t} /t = 1,...,T/.

A szektor-modellek: lineáris programozási modellek. Alkalmazzuk tehát a linearitási feltevéssel kapcsolatos szokásos egyszerüsitéseket, vállalva az ezzel járó pontatlanságokat. Mivel a linearitás problémája jól ismert az irodalomból, erre nem szükséges itt bővebben kitérnünk.

A szektor-program számára előirt feltételeket két fő kategoriába sorolhatjuk. A feltételek egyik kategoriája: a központtól kapott előirások, a központi előirás-feltételek. Lényegük: a szektor teljesitse az előirt ellátási feladatot anélkül, hogy túllépné az előirt anyag- és létszámkereteket. Vizsgáljuk meg ezeket közelebbről.

$$/2.7/ \quad z_{it} \geqq \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp}} f_{ikt}\, x_{ikt} + \sum_{k=inv} f_{ikt}\, x_{ik} \geqq z_{it}$$

/t=1,...,T/,

ahol f_{ikt} az i-edik szektor k-adik tevékenysége által a t-edik időszakban biztositott termékmennyiség. Az együttható nagysága a tevékenység különböző csoportjainál a következő:

1. A reprodukáló tevékenységeknél f_{ikt} = 1 /k = repr, t = 1,...,T/. A reprodukáló tevékenység egy egysége tehát egy termékegységet állit elő a t-edik időszakban.

2. A beruházási tevékenységeknél $f_{ikt} \geqq 0$, de legalább egy t-re f_{ikt} = 1 /k = inv; t = 1,...,T/. Ez a következőket jelenti:

A beruházási tevékenység egy egységének eredményeképpen valamikor, de legkésőbb a tervperiodus utolso időszakában létrejon egy kapacitás-egység, amely képes lesz egy időszak alatt egységnyi i-edik termeket előállitani. Az ezt megelőző termelés viszont attól függ, mikor indul a beruházás és milyen felfutás jellemzi. Feltételezzük, hogy a k-adik beruházási tevékenységre a termekkibocsátás /és, mint latni fogjuk, a ráforditások/ meghatározott időbeli lefutása jellemző.* Másszóval egy-egy beruházási változóra az f_{ikt} együtthatók egy csoportja jellemző: $f_{ik1}, f_{ik2}, \ldots, f_{ikT}$. Legyen pl. a vegyi szektormodell 17. változója: egy meghatározott uj vegyiüzem épitése olymódon, hogy a beruházási tevékenység a 2. időszakban kezdődik, a 3. időszakban a végleges kapacitás 60 %-át adja, s a 4. időszakban már 100 %-os kapacitással termel. Ezesetben $f_{i,17,1} = 0$, $f_{i,17,2} = 0$, $f_{i,17,3} = 0{,}6$, $f_{i,17,4} = 1$, $f_{i,17,5} = 1$.

Viszont a technologiai szempontból azonos, de egy időszakkal később megkezdett 18. változónál az együttnatók: $f_{i,18,1} = f_{i,18,2} = f_{i,18,3} = 0$, s csak $f_{i,18,4} = 0{,}6$; $f_{i,18,5} = 1$.

Feltételezzük, hogy a beruházás révén keletkezett kapacitásokat a felfutás után mindig normális mértékben kihasználják. Tehát nem hozunk létre olyan kapacitást, amelyet azután

- - - - - - - - - -

* A beruházások ilyen kezelése némileg hasonló ahhoz, ahogyan Ragnar Frisch [5] művében a beruházási tevékenységek különböző "csatornáit" /channel/ kezeli.

egy későbbi időszakban nem használnánk ki*. Ha tehát f_{ikt} valamely t-re egyenlő 1-el, akkor ugyancsak 1 a /t+1/-edik, /t+2/-edik stb. időszakokra is. Ennyiben tehát a tevékenységeknek ez a csoportja különbözik a reprodukáló csoporttól. Annál ugyanis nem tételeztük fel, hogy a meglévő régi kapacitásokat szükségképpen ki kell használni.

3. Az export tevékenységeknél $f_{ikt} = -1$ /k = exp/, másszóval az export tevékenységekhez el kell vonni a hazai ellátás elől az i-edik terméket.

4-5. A korlátos import tevékenységeknél, valamint a szabad importnál $f_{ikt} = 1$ /k = imp, 0/, azaz egy egységnyi importtevékenység egységnyi i-edik terméket bocsát a hazai ellátás rendelkezésére.

Ezek után világos a /2.7/ feltétel tartalma: a hazai termelésnek /a régi és az ujonnan termelt kapacitásokon/ plusz az importnak /korlátos és szabad importnak/ az export levonása után elegendőnek kell lennie a hazai ellátási feladat teljesitéséhez.

A következő központi előirás feltétel-sorozat:

- - - - - - - - - -

* Ez a feltételezés kizárólag a szektor-modell méreteinek csökkentése érdekében szükséges. Igy ugyanis egyrészt megtakaritnatjuk azt, hogy külön változóként épitsük a modellbe a beruházási tevékenységeket és a beruházás révén keletkező kapacitáson folyó termelő tevékenységet. Másrészt: külön feltételekkel kössük össze a változóknak ezt a két tipusát. Feltételezésünk egyébként reális. Nem érdemes olyan uj kapacitásokat létrehozni, amelyeket mindjárt a megindulást követő első esztendőkben nem tudunk normálisan kihasználni.

$$/2.8/ \quad \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp}} g_{ijkt}\, x_{ikt} + \sum_{k=inv} g_{ijkt}\, x_{ik} \leqq z_{ijt} \qquad /j=1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T/,$$

ahol g_{ijkt} az i-edik szektor k-adik tevékenységének egy egysége által a t-edik időszakban igényelt j-edik anyag mennyisége. Ez utóbbi nagysága a tevékenységek különböző csoportjainál:

1. $g_{ijkt} \geqq 0$ a reprodukáló tevékenységeknél /k = repr/. A termelés technológiai jellegénél fogva igényli, vagy nem igényli a j-edik anyagot. Ez az anyagigény magában foglalja mind a folyó üzemeltetés anyagigényét, mind pedig a régi kapacitás fenntartásához, egyszerü ujratermeléséhez szükséges nagyjavitási és pótlási, felujitási akciók anyagigényét.

2. $g_{ijkt} \geqq 0$ a beruházási tevékenységeknél /k = inv/. Ez magában foglalja az uj kapacitás megteremtésének éveiben a beruházás által igényelt anyagokat /például gépek, villamos berendezések, stb./, az üzemeltetés éveiben pedig mind a folyó termeléshez, mind a már megteremtett kapacitás fenntartásához szükséges anyagokat. Hasonlóképpen a kibocsátáshoz, itt is feltételezzük: a k-adik beruházási tevékenységre az anyagigények meghatározott időbeni lefolyása jellemző. Tehát például az 1. beruházási tevékenység a vegyiparban a 2. időszakban kezdődik, ennek megfelelően az 1. időszakban semmilyen anyagot nem igényel, a 2. időszakban a beruházás megvalósitása idején főként gépet és épitést, a 3. időszakban a felfutás alatt már sok bányászati terméket, villamosenergiát, de még némi épitést is. A 4. időszaktól kezdve pedig már csak az üzemeltetéshez, valamint a megteremtett kapacitások fenntartásához szükséges anyagokat.

ugyanebben a szektorban szerepelhet egy másik, a 2. beruházási tevékenység, amelynek müszaki jellemzői azonosak, de amely egy időszakkal később indul meg. Ez esetben a g_{ijkt} együtthatók még a második időszakban is 0-ák és csak a 3. időszaktól kezdve válnak pozitivakká.

3-4-5. $g_{ijkt} = 0$ /k = exp, imp, 0/. Valamennyi külkereskedelmi tevékenység anyagigénye nyilvánvalóan 0.

Végül az utolsó központi előirás feltétel:

$$/2.9/ \quad \sum_{k=repr,exp,imp} h_{ikt}\, x_{ikt} + \sum_{k=inv} h_{ikt}\, x_{ik} \leqq w_{it} \qquad /t=1,...,T/,$$

ahol h_{ikt} a k-adik tevékenység egy egysége által igényelt létszám a t-edik időszakban. A különböző kategóriákban:

1. A reprodukáló tevékenységeknél határozottan pozitiv. Munkaerő nélkül nem folyhat termelés: $h_{ikt} > 0$ /k= repr/.

2. A beruházási tevékenységeknél pozitiv vagy nulla $h_{ikt} \geqq 0$ /k = inv/. 0 a beruházás megkezdése előtt, ettől kezdve pozitiv; számszerü nagyságának - akárcsak a kibocsátási és az anyagigény-együtthatóknak - jellegzetes időbeli lefolyása ez.

3-4-5. A külkereskedelmi tevékenységek létszámigénye nulla: $h_{ikt} = 0$ /k = exp, imp, 0/.

A /2.5/ központi és a /2.9/ szektorfeltételekből kitünik: modellünk nem irja elő kötelezően a népgazdasági munkaerőkeret szerint rendelkezésre álló létszám teljes foglalkoztatását. Célfüggvényünk, mint látni fogjuk, hozam-maximalizálást ir elő, ezért feltehető, hogy a program, amelyhez a számitással eljutunk, a munkaerőkeretet kimeriti. Ez azonban nem szükségképpen van igy. Amennyiben a programozás eredményeképpen netán munkaerőfelesleg mutatkozna, a gazdasági vezetésnek módjában van határoznia a további intézkedésekről. /Pl. leszállitja a munkaidőt, vagy előirja a munkaerőfelesleg felszivását a termelésbe azon az áron is, hogy gazdaságilag kevésbé előnyös programot hajt végre stb./

A központi feltételek mellett vannak a szektor sajátos körülményeire jellemző speciális feltételek. Számuk: m_i'.

Néhány példa ezekre:

- A reprodukáló tevékenységeket korlátozza a jelenlegi meglévő kapacitás felső határa.

- Egyes beruházási tevékenységeknek, például a jelenlegi üzemek rekonstrukciójának, szük keresztmetszetek feloldásának vannak felső határai.

- A hazai termelést egyes szektorokban természeti adottságok /például a geológiai kincs nagysága/ korlátozzák.

- Egyes export és import tevékenységeknek vannak felső határai.

E feltételekben szereplő korlátok egy része gazdaságpolitikai előirás, azaz korábbi tervszámitásokból merithető, más részüket a számitás céljaira kell kidolgozni. A speciális feltételeket összefoglalóan a következőképpen fejezzük ki:

$$/2.10/ \quad \sum_{t=1}^{T} \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp}} a'_{ijkt}\, x_{ikt} + \sum_{k=inv}^{inv} a'_{ijk}\, x_{ik} \leqq b'_{ij}$$

$$/j=1,\dots,m_i'/,$$

ahol

b'_{ij} = a j-edik speciális feltételben szereplő <u>speciális korlát.</u> Például kapacitáskorlát, természeti kincs mennyisége, export-import-korlát, stb. Ez nem-negativ: $b_{ijt} \geq 0$ $/j = 1,\ldots,m'_i/$. *

a'_{ijkt} = a j-edik speciális feltételben a k-adik nem-beruházó tevékenységre a t-edik időszakban vonatkozó együttható /például a szénbányászatban a k-adik reprodukáló tevékenység egységének 1965.-66. évi igénye a hazai szénkincsre/.

a'^{inv}_{ijk} = a j-edik speciális feltételben a k-adik beruházó tevékenységre vonatkozó együttható.

A felsorolt központi és speciális feltételeken kivül itt is kimondjuk, hogy a program változói nem lehetnek negativak:

$$/2.11/ \qquad \begin{array}{ll} x_{ikt} \geq 0 & /k = repr, exp, imp, 0; t=1,\ldots,T/ \\ x_{ik} \geq 0 & /k = inv/ \end{array}$$

A szektor programja megengedett, ha teljesiti a /2.7/-/2.11/ feltételeket.

Tekintsük át, milyen kérdésekben hoztunk döntést, amikor a szektorprogramot meghatároztuk:

1. Mennyit termeljünk a szektorra jellemző termékből a tervperiódus különböző időszakaiban?**

- - - - - - - - -

* A korábban elmondottak értelmében $a_{ijot} = 0$; azaz a speciális feltételek nem érintik a szabad importot.

** Ezek a termékek, mint emlitettük, egész termékcsoportok. Programozásunk nem felel arra, hogy e termékcsoportokon belül milyen legyen az egyes konkrét gyártmányok aránya. Erre még visszatérünk.

2. Milyen beruházásokat hajtsunk végre: Ezen belül:

   2.1 Mi történjék a régi kapacitásokkal? Ha a régi kapacitásokat nem meritjük ki, vagy éppenséggel egyáltalán nem használjuk fel, ugy ez gyakorlatilag e kapacitások részleges vagy teljes leszerelését jelenti. Esetleg: Milyen bővítést, rekonstrukciót hajtsunk végre a régi kapacitásokon?

   2.2 Milyen uj beruházásokat valósitsunk meg és milyen alapvető technológiával?

   2.3 Mikor hajtsuk végre a beruházásokat?

3. Milyen volumenü export tevékenységet bonyolitsunk le a terv különböző időszakaiban, milyen irányban?

4. Milyen volumenü import tevékenységet bonyolitsunk le a terv különböző időszakaiban, milyen irányból?

A program tehát a szektor komplex termelési, beruházási, müszaki fejlesztési, export és import tervét foglalja magában.

A szektor-modelleknek ez a szerkezete érthetővé teszi, miért szerepel a központi programban egyetlen primér erőforrásként a munkaerő.

Először: a választást korlátozó természeti erőforrások a szektorok speciális feltételei között szerepelnek.

Másodszor: a hosszulejáratu tervekben rendszerint korlátozott erőforrásként szereplő beruházási erőforrásokat nem szükséges külön korlátoznunk. Ami ezeknek az erőforrásoknak a globális korlátozását illeti: bizonyos korlátot szab a Q_{it} extern fogyasztások előirása. Azzal, hogy eldöntöttük a nemzeti jövedelem fogyasztási alapjának nagyságát és összetételét /nem a fogyasztási alap arányát!/, bizonyos fokig korlátoztuk a felhalmozást. De csak bizonyos fokig, mert a felhalmozási alap növelhető a nemzeti jövedelem emelésével.

Ezen kivül a beruházási tevékenységeket korlátozzák a központi termékmérlegek. Például nem használható fel több épités a beruházások céljaira, mint amennyi az extern fogyasztás épitési szükségletének kielégitése és a reprodukáló tevékenységek épités-szükséglete /épület-fenntartás/ után fennmarad.

A gyakorlati felhasználás során a kész programból könnyen kiemelhető a beruházási tevékenységek terve: valamennyi szektor "inv"-tevékenységeinek összege e tevékenység révén meginduló normál termelés előtt. Modellünk jellegzetessége azonban az, hogy a programozás során nem huz merev választóvonalat a beruházási célokra igénybe vett termékek és a folyó termelés /valamint az export/ céljaira igénybevett termékek között.*

2.3 A célfüggvény

Az alábbiakban először leirjuk célfüggvényünk tartalmát és tisztázzuk meghatározásának néhány problémáját és csak azután térünk ki közgazdasági indokolására.

Optimális az a megengedett program, amelynek nettó devizahozama maximális.

Szektorméretekben: Az i-edik szektorban** optimális az x_{ikt}, x_{ik} változóknak az az együttese, amelyeknél a szektor összes nettó deviza-

- - - - - - - - - - -

* Ebből következik, hogy a nemzeti jövedelem kategóriája nem szerepel közvetlenül modellünkben. Dinamikus modellünk feltételi rendszere nyitvahagyja azt a kérdést, hogy a társadalmi terméknek az extern fogyasztás után fennmaradó részéből mit használjunk fel a folyó termelés anyagfelhasználásaként s mit beruházásként a termelő apparátus kibővitésére. Ezt az arányt, s ezzel együtt a nemzeti jövedelem részarányát a társadalmi termékben éppen a programozás keretében kell kialakitani.

** Rögzitett központi program mellett! Az x_{ikt}, x_{ik} változók értéke a központi program értékétől is függ, de ezt a függést itt nem tüntettük fel.

hozama, C_i maximális:

$$C_i^{*} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp,0}} c_{ikt} x_{ikt}^{*} + \sum_{k=inv} c_{ik} x_{ik}^{*} =$$

/2.12/

$$= \max_{/szekt/} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp,0}} c_{ikt} x_{ikt} + \sum_{k=inv} c_{ik} x_{ik},$$

ahol c_{ikt} a k-adik tevékenység egységének hozama a t-edik időszakban. Ezt az egész modellben egységesen, egy bizonyos pénznemben mérjük. /Például rubelben, vagy dollárban, vagy devizaforintban./

A tevékenységek különböző csoportjaira vonatkozóan megállapíthatjuk:

/2.13/

$$c_{ikt} \leqq 0 \qquad /k=repr,\ t=1,\dots,T/,$$

$$c_{ik} \leqq 0 \qquad /k=inv/,$$

$$c_{ikt} > 0 \qquad /k=exp,\ t=1,\dots,T/,$$

$$c_{ikt} \leqq 0 \qquad /k=imp,\ 0;\ t=1,\dots,T/.$$

1-2. A hazai termelő és beruházási tevékenységek hozama általában 0. Kivétel ez alól az a termelő és beruházási tevékenység, amely nem kompetitiv importot igényel. Egy példa erre: A kohászati szektor áramigényét az áramszektor, szénigényét a szénszektor fedezi, tekintettel arra, hogy ezeknél szóbakerülhet mind a hazai termelés mind az import. Ezzel szemben a kohászat nikkel, króm, vanádium és molibdén igényét mindenképpen importból kell fedezni, mert ezek hazai termelése szóba se jöhet. Ezért ennek a nem-kompetitiv importnak a költségét a hazai termelő és beruházási tevékenység terhére kell irni negativ hozamként.

Vajon a hazai termeléshez szükséges kompetitiv jellegü importanyag nem terheli a termelő tevékenységet negativ tételként? Nem, mert a kompetitiv import nem a felhasználó, hanem az ellátó szektor célfüggvényértékét terheli meg. Tehát például a kohászatban felhasznált importáram nem a kohászati szektormodell célfüggvény-értékében jelentkezik, hanem az áramszektorában.

3. Az export-tevékenységek - és csak az export-tevékenységek - hozama pozitiv. Modellünkben szerepelhet ugyanannál a terméknél többféle exportár /s hasonlóképpen: többféle importár/, például a legmagasabb áron eladható exportterméket a korlát felett már olcsóbban kell eladni.

4. Az import-tevékenységek hozama negativ. A javasolt eljárás alkalmazhatósága érdekében azzal az - egyébként rendszerint teljesen jogos - feltevéssel élünk, hogy a modellben szereplő külkereskedelmi tevékenységeknél az egységre eső exportár semmiképpen sem magasabb az egységre eső importárnál, azaz

$$/2.14/ \qquad \max_{k=exp} c_{ikt} \leq \min_{k=imp} /-c_{ikt}/$$

5. A szabad import hozama negativ. Amennyiben a szabad import nem reális, hanem csupán fiktiv változó, akkor rendkivül magas fiktiv negativhozamot, negativ c_{iot}-t kell megszabnunk számára. Ez esetben az optimalizálás során elsőként a fiktiv importváltozó szorul ki a programból. Programunk <u>matematikai</u> értelemben megengedett akkor is, ha még szerepel benne fiktiv változó, <u>gyakorlati tervezői</u> értelemben azonban csak akkor válik a program megvalósithatóvá, ha - az első optimalizálási lépések

után - a fiktiv változó már kiszorult a szektor-programból. A továbbiakban azt a megengedett programot, amelyben fiktiv változó nem szerepel, reális programnak nevezzük.

Miután tisztáztuk a célfüggvényt szektorméretekben, tisztáznunk kell népgazdasági méretekben is. Optimális az a központi program, amely mellett a maximális szektor-célfüggvény értékek összege maximális. Optimális tehát a központi változóknak az a z^*_{it}, z^*_{ijt} és w^*_{it} együttese, amely mellett a szektorprogramozásokban szereplő maximális célfüggvény-értékek összege maximális. Ezesetben a szektorokbeli optimális x^*_{ikt}, x^*_{ik} változókra:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp,0}} c_{ikt} x_{ikt} + \sum_{k=inv} c_{ik} x_{ik} =$$

/2.15/

$$= \max_{/közp/} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\substack{k=repr,exp,\\ imp,0}} c_{ikt} x^*_{ikt} + \sum_{k=inv} c_{ik} x^*_{ik}$$

Ezek után felvethetjük a kérdést, hogy közgazdaságilag indokolt-e a célfüggvénynek ez a megformulázása. Mindjárt előljáróban lerögzithetjük: nem állitjuk, hogy ez az egyedül lehetséges és indokolt célfüggvény. Tisztában vagyunk azokkal a nagy nehézségekkel, amelyek a célfüggvényben számbavett külkereskedelmi árak számszerü meghatározásakor felmerülnek. Éppen ezért a 4. fejezetben rávilágitunk, inkább csak példaképp, más lehetőségekre is. Mindenesetre az itt leirt célfüggvény reálisnak, gyakorlatilag alkalmazhatónak és előnyösnek tünik a következő megfontolások miatt:

Nem egyedül e célfüggvény szabályozza a népgazdaság strukturáját, mert azt már messzemenően befolyásolták az extern fogyasztást megszabó Q_{it} konstansok. Ezek gazdaságpolitikai előirások, amelyeket már programozásunk előtt eldöntöttek és amelyekben kifejezésre jutnak a gazdaságpolitika egyes alapvető követelményei /az életszinvonal emelésének fő előirányzatai, a honvédelmi szükségletek fedezése, stb./.

Végeredményben modellünk a társadalmi munka termelékenységének emelésére késztet: a feladat az, hogy a népgazdaság összes adott munkaereje minél nagyobb terméktömeget, használati termék-tömeget állitson elő. E termék-tömeg számbavételénél az előirt mennyiségü és összetételü hazai extern fogyasztáson felüli részt egy speciális sulyrendszerrel - a devizahozammal - mérjük.

A deviza-mérleg javitása, mint optimalizálási szempont, különösen indokolt a mi körülményeink között. Egyrészt, mert a külkereskedelemnek igen nagy a sulya a népgazdaságban: gazdaságunk egészséges szerkezete messzemenően attól függ, előnyös-e beilleszkedésünk a nemzetközi munkamegosztásba. Másrészt: évek óta feszültségek vannak külkereskedelmi mérlegeinkben és ezért a népgazdasági tervezés tényleges gyakorlatában is központi szerephez jut - az alapvető belső arányosságok biztositásán tul - a deviza-mérlegek javitásának követelménye.

Természetesen a többlet-deviza megszervezése nem öncél. Amennyiben például a programozás eredményeképpen sikerülne jelentős aktivumot biztositani egyes időszakok külkereskedelmi mérlegeiben, külön döntéssel meg kell határozni, hogy ezt mire forditsuk: beruházásra, fogyasztási cikkek importjára, adósságok törlesztésére, hitelek nyujtására, stb. Ez nyilván a könnyebbik gond lenne; az mindenképpen "tiszta haszon", ha a devizahozam emelkedik.

A változóknak, a feltételeknek és a célfüggvénynek az előbbiekben leirt szerkezete módot ad arra, hogy kifejezésre jussanak az egyes ágazatok fejlesztésének relativ előnyei és hátrányai:

- Hol áll rendelkezésre hazai természeti kincs.

- Milyen termékre van széles külföldi értékesitési lehetőség; hol van /begyakorlottság, szellemi "tőke", a korábbi export-tevékenységgel elért jó hirnév eredményeképpen/ ár szempontból is kedvező export-lehetőség.

- Hol vannak olyan beruházási lehetőségek, például rekonstrukció, szük keresztmetszetek feloldása, amelyek aránylag kevés befektetéssel is erőteljesen hozzájárulhatnak a népgazdasági fejlődéshez.

- Mely termékek importját pótolhatjuk aránylag kevesebb hazai ráforditással.

- Mely termékek iránt nő különösen gyorsan a hazai igény, és igy tovább.

Az ilyen és hasonló relativ előnyök és hátrányok számbavételére alapulhat a választás a között, hogy mely szektorokban fejlesszük erőteljesebben és melyekben lassabban a hazai termelést. Modellünk hivatása tehát az, hogy az ágazatok fejlesztésének fő arányait segitse kialakitani.

2.4 A beruházások kezeléséről.

Modell'ink általános leirása után külön ki kell még térni a beruházások kezelésének néhány problémájára.

Az egyik probléma: tulajdonképen milyen tevékenységeket foglaljon magába a szektor modell egy-egy beruházási változója? Véleményünk szerint általában nem egyetlen uj üzem létesitését, hanem a beruházási akciók egész összefüggő komplexusát. Ha egy szektormodellben mondjuk tiz beruházási változó szerepel, akkor ez ne tizféle gyár megteremtését reprezentálja, hanem a szektor fejlesztésének tiz alternativ irányvonalát; a gazdasági életben ma használatos kifejezéssel: tizféle "koncepcióját". Tehát pl. a vegyiparban ne a polyamid-szál vagy a polypropylén-szál termelésének kiépitése szerepeljen egy-egy beruházási változóként, hanem pl. az egész müanyag- és müszálipar komplex fejlesztésének 2-3 lehetséges akció terve, a földgáztól egészen a müanyag feldolgozásáig és a kész müszálig. Ez természetesen bizonyos fokig leszükiti a választási lehetőségeket a részletekben, hiszen egy-egy beruházási változó ilyenformán eleve meghatározott arányokban kapcsol össze olyan résztevékenységeket, amelyeket tulajdonképen sokféle arányban kombinálhatnánk. Ezt a hátrányt azonban kompenzálja az az előny, hogy előtérbe kerül a választás a fő koncepciók, a fő fejlesztési irányvonalak között.

Miben különböznek egymástól a szektor modellekben szereplő fejlesztési fő irányvonalak, a beruházási változók?

a./ A szektor termékei közül melyek termelésének kibővitésére fektetik a hangsulyt?

b./ Milyen módon épitik ki a szektor belső vertikalitását? A termelés mely lépcsőfokaiban lesznek hazai kapacitások, s melyeknél rendezkedünk be importra?/Tehát pl. a nehézipar egyik beruházási változója olyan fejlesztési irányvonalat ir elő, amely magában foglalja a hazai aluminiumkohászat kiépitését, egy másik változó pedig azt az irányvonalat, amely a kohászati müveleteket külföldön végezteti el./

c./ Beruházásigényesebb vagy kevésbé beruházásigényes technikai változatot hajtunk-e végre? Ebben a kérdésben nem szabad eleve, a programozás előtt dönteni. A népgazdaság erőforrásai nem korlátlanok. A programozás során kell kitünnie, mely területeken célszerü a technikailag legfejlettebb változatok végrehajtására, s hol kell megelégedni kevésbé beruházás-igényes fejlesztéssel.

Később még részletesen kitérünk a modell méreteinek problémájára. Már itt is előrebocsáthatjuk azonban: a méretek számitástechnikai adottságok miatt szükségképpen korlátozottak. A beruházási változók tartalmának helyes meghatározásán áll, vagy bukik: vajon népgazdasági programozási modellünk végeredményképen elég tartalmas lesz-e? Módot ad-e a valóban alapvető, lényeges fejlesztési irányvonalak közötti választásra? Ha helyesen emeljük ki minden szektorban a leginkább reprezentativ fejlesztési irányvonalakat, akkor modellünk segitségével tartalmas eredményekhez jutunk az elkerülhetetlen agregáció ellenére is.

Egy másik probléma: milyen hatást gyakorol a beruházások programjára az a tény, hogy tervperiodusunk véges?

A feltételi rendszer és a célfüggvény olyan beruházásokat hoz be az optimális programba, amelyek még a tervperiodusban éreztetik hatásukat: hozzájárulnak a hazai szükségletek kielégitéséhez, importot pótolnak, exportot tesznek lehetővé, munkaerőt vagy anyagot takaritanak meg. Viszont nem jelennek meg a programban olyan beruházások, amelyek hasznos hatásukat jórészt vagy teljesen a tervidőszak után fejtenék ki. Márpedig nyilvánvaló, hogy biztositani kell a beruházások folyamatosságát, el kell kerülni a törést a tervperiodus és az utána következő időszak között.

E probléma tulajdonképpen nem a matematikai módszerrel végzett programozás speciális nehézsége; minden távlati tervezésnél meg kell birkózni e nehéz kérdéssel, az átmenet biztositásával a tervezett és a rákövetkező periodus között.

Vajon egyáltalán hiba-e, hogy az optimális programból kimaradnak ezek az átmenő beruházások? /A továbbiakban átmenő beruházásnak nevezem azokat, amelyek megvalósitása jórészt vagy teljesen a tervperiodusban megy végbe, hasznos hatása azonban jórészt vagy teljesen a tervperiodus után nyilvánul meg./ Véleményünk szerint ez nem hiba. Dinamikus modellünk hosszu időszak /10-15-20 év/ tervezésére szolgál. Nem lehet és nem is szükséges mondjuk 1963-ban megtervezni az 1975-80 közötti időszak részletes beruházási programját. Nem lehet, mert ehhez számitásba kellene venni az 1980 utáni körülményeket is; márpedig ilyen messzire érdemlegesen előrelátni lehetetlen. De nem is szükséges, mert a leghosszabb megvalósitási időt igénylő beruházások tartama is jóval kisebb 17 évnél, a döntéssel tehát ráérünk.

Ebből azonban nem következik, hogy az átmenő beruházások problémáját egyszerüen figyelmen kivül hagyhatjuk. Számolnunk kell azzal, hogy - ha konkrét összetételét nem is ismerjük pontosan - lesznek a tervperiodus vége felé ilyen beruházások. Biztositani kell tehát azt, hogy képesek legyünk ilyen beruházásokat végrehajtani; mintegy tartalékolni kell a népgazdaság "beruházóképességét" erre a feladatra.

Fel kell tehát futtatni a beruházások megvalósitásában közvetlenül vagy közvetve közremüködő szektorokat a megfelelő szinvonalra.

Modellünk esetében ez gyakorlatilag a következőket jelenti:

1. Tudomásul vesszük, hogy a számitás eredményeképpen kapott programban pozitiv értékkel szereplő beruházási változók összessége nem fogja át az egész tervperiodus teljes beruházási feladatát. Minél későbbi időszakról van szó a tervperioduson belül, annál hiányosabb a programunkból adódó konkrét beruházási feladat-terv.

2. Az átmenő beruházások megvalósitásához szükséges "beruházóképesség" tartalékolását, a beruházási potenciál kellő felfuttatását azzal biztositjuk, hogy az átmenő beruházásoknak a beruházási javakra vonatkozó igényét beépitjük az extern fogyasztás előirányzatai közé. Ehhez természetesen hozzávetőleges hipotézisek szükségesek az átmenő beruházások összetételére. Ezeket modellünkben gazdaságpolitikai előirásoknak tekintjük, amelyeket a hagyományos módon kidolgozott távlati tervből veszünk át.*

3. Célszerü lesz a tervperiodust nem egyenlő tartamu időszakokra osztani. Az első, részletesebben tervezett szakaszt jobban tagolhatjuk /pl. két-három, egyenként 2-3 éves időszakra/, mig a távolabbi szakaszt összevontabban kezelhetjük /pl. egyetlen tizéves időszaknak tekinthetjük./

- - - - - - - - -

* Maga a programozás módot ad e hipotézisek felülvizsgálatára. A programozás eredményeképpen részletesen meghatározzuk a korábbi időszakok beruházási politikáját. A későbbi periodus beruházásaira vonatkozó hipotézist akkor tekinthetjük viszonylag megnyugtatónak, ha - legalábbis megközelitően - szervesen folytatja a korábbi periodus beruházási politikáját. Amennyiben a korábbi és a későbbi időszakok beruházási politikája között valamiféle törés mutatkozna, akkor - az első időszakokra kapott eredmények fényében - célszerü lesz a későbbre vonatkozó hipotéziseket korrigálni, s a számitást esetleg megismételni.

Végeredményben elgondolásunk összhangban van a 15-20 éves perspektivikus tervek készitésének általános céljaival. Azért tervezünk 15-20 évre, hogy a tágabb horizont segitségével megbizhatóbban jelölhessük ki az első 5-10 év konkrét teendőit. Ha az első 5 év letelik, akkor ismét meg kell hosszabbitani az idő-perspektivát, s ujra 15-20 évre kell előretekinteni a soronkövetkező 5 év teendőinek kidolgozásához. Senki sem gondol azonban arra a 15-20 éves tervek kidolgozásakor, hogy ettől kezdve egészen a huszadik év végéig már csak végre kell hajtani azt, amit 20 évre előre elterveztünk.

Nem állitjuk, hogy a javasolt megoldás minden tekintetben megnyugtató.* A kérdés feltétlenül további vizsgálatot, tisztázást, részletesebb kidolgozást igényel. Ugy gondoljuk azonban, hogy a fentiekben körvonalazott megoldás megvalósitható, s emellett közel is áll a gyakorlati tervezői szemlélethez.

2.5 A programozási eljárás.

A programozás azzal kezdődik, hogy a központ megadja a központi előirásokat /az ellátási feladatot, az anyagkeretet és a létszámkeretet/ a szektornak. A szektorok a központi előirások korlátai között

- - - - - - - - -

* Felmerülhetnek más elgondolások is. Pl. elképzelhető, hogy diszkontált hozam formájában "előlegezve" reprezentáljuk a későn belépő beruházási tevékenységek hasznos hatását. Igy a programozás célfüggvénye ezeket a tevékenységeket is "behozná" a programba.

meghatározzák saját optimális programjukat. Ez "szabályos" lineáris programozási feladat, amely a szokásos módszerekkel, például a szimplex-módszerrel megoldható.

Amennyiben a központi előirások a lehető legcélszerübbek voltak, ugy ezzel a programozás be is fejeződött volna. Csakhogy ez egyáltalán nem biztos. Lehetséges, hogy a központnak nem sikerült "első nekifutásra" a lehető legcélszerübb központi előirásokat kidolgoznia. Ezért a központ le akarja mérni az ellátási feladatok és az anyag-, illetve létszámkeretek elosztásának helyességét. Erre a célra jelentést kér a szektoroktól, amelyeknek adatokat kell közölniök arról, milyen hatékonyan képesek hasznositani a központtól kapott anyagot, létszámot, illetve milyen hatással jár náluk az ellátási feladat teljesitése.

E visszajelentéshez meghatározzák a központi előirások un. árnyékárait. Az árnyékár közgazdasági tartalma esetünkben:

ζ_{it} = az ellátási feladat árnyékára. Azt fejezi ki: Mennyivel emelkedne az i-edik szektor devizahozama a t-edik időszakban, ha egységnyivel* csökkenne a szektor ellátási feladata, miközben a szektor-modell feltételeiben szereplő többi korlát változatlan maradna.

----

* Szigoruan véve itt is és a többi korlátnál is az árnyékár nem a korlát egységnyi, hanem végtelenül kicsiny változására eső hasznonváltozást fejezi ki. Csupán a könnyebb megértés kedvéért szólunk a gyakorlatilag kézzelfoghatóbb, elképzelhető egységnyi változásról.

ξ_{ijt} = az anyagkeret árnyékára.

ω_{it} = a létszámkeret árnyékára. Ezek azt fejezik ki: mennyivel emelkedne az i-edik szektor devizahozama a t-edik időszakban, ha egységnyivel emelnénk a szektor anyagkeretét a j-edik anyagból, illetve a szektor létszámkeretét, miközben a többi korlát változatlan maradna.

Ezenkivül meghatározzuk a speciális feltételekben szereplő korlátok, valamint az ellátási feladathoz megszabott felső határok árnyékárait is.

A szektor-modellben szereplő valamennyi korlát árnyékárait megkapjuk, ha a szektor az eredetileg megadott elsődleges programozási feladat un. duális feladatát oldja meg.* Ebben a feladatban a változók: a korlátok árnyékárai; a változók célfüggvénybeli együtthatói: az eredeti elsődleges programozási feladatban szereplő korlátok.

A duális feladat célfüggvénye az árnyékárak összegének minimalizálását irja elő. E célfüggvényben a felülről korlátos, "kisebb-egyenlő" feltételek korlátainak árnyékárait összeadjuk és levonjuk belőlük az alulról korlátos, "nagyobb-egyenlő" feltételek korlátainak árnyékárait. /Esetünkben csupán az ellátási feladat korlátos alulról./**

- - - - - - - - -

* A duális feladat modelljét lásd a /6.204/-/6.210/ képletekben.

** Az összeadás, illetve levonás könnyen érthető, ha átgondoljuk a különböző árnyékárak közgazdasági jelentését:

A szektor hozamát növeli, /vagy legalábbis növelheti/ ha a rendelkezésére bocsátott erőforrásokat, kereteket növeljük. Viszont a hazai szükségletre történő kibocsátást csökkenteni kell, hogy a szektor több devizahozamot szerezhessen.

Mit fejez ki közgazdaságilag az a követelmény, hogy az összes korlátok árnyékár-összege legyen minimális?

A duális programban kapott árnyékárak nevezetes tulajdonsága: az elsődleges feladat optimális programjához tartozó optimális célfüggvény-érték teljes egészében "felosztódik" a korlátokra. Esetünkben tehát az árnyékárak minimális összege pontosan egyenlő a tevékenységek maximális hozamával.

Tegyük fel egy pillanatra a következőket: a központ valóban olyan "áron adja" a szektornak az erőforrásokat, amilyen árat a szektor viszszajelent s ugyanakkor megköveteli a szektortól, hogy ne legyen veszteséges. Ha a szektor tul rózsaszinü, tul magas árnyékárat jelentett vissza; /például azt állitotta, hogy a létszámkeret emelése nagyobb többlet-hozamot biztosit, mint amennyire az optimális program szerint valóban képes/, akkor a szektor veszteségessé válna. Az árnyékárak minimalizálása, mint a modell optimalizálási követelménye, azt fejezi ki: óvakodni kell a feltételekben szereplő korlátok módositásának, a módositás révén a célfüggvényben mutatkozó hatásnak a tulértékelésétől. A duális feladatban az árnyékárak minimalizálása az óvatosság, a felelősségteljes mértéktartás attitüdjét fejezi ki a visszajelentés keretében adott gazdaságossági mutatószámok meghatározásánál. /Ez a felelősségteljes, óvatos magatartás egyébként nemcsak itt, hanem más gazdasági mutatószámok jelentésénél is kivánatos lenne./

Térjünk mármost vissza a központhoz. A központ megkapta valamenynyi szektortól a visszajelentést, az eredeti központi előirások árnyékárait. Ez mintegy tükörképe, "bizonyitványa" az eredeti központi programnak. Tegyük fel: kitünik, hogy a létszámkeret árnyékára az 1. szektorban 100, a 2. szektorban viszont csak 50. Kézenfekvő a gondolat: a 2. szektor létszámkeretét csökkenteni kell az 1. szektor javára. Vagy kitünik, hogy az áramkeret árnyékára a 3. szektorban 60, a 9. szektorban azonban csak 20. Ezért érdemes az áram egy részét átcsoportositani a 9. szektorból a 3. szektorba.

Az átcsoportositások alapján egy uj központi program készül. A szektorok uj központi előirásokat kapnak. A szektorok ismét megállapitják az uj központi előirások árnyékárait. A központ ezek figyelembevételével ujra korrigálja a központi programot, ismét módositott központi előirásokat ad a szektornak és igy tovább. Az eljárás számos lépésből áll; egy-egy lépés mindig egy központi program-javitást és egy ágazati duál programozást, azaz árnyékár-meghatározást foglal magában.

Az <u>iterációs</u> eljárás során kétirányban áramlanak az információk: a központból a szektorokhoz a központi előirások uj és uj együttese, a szektorokból a központba az árnyékárak uj és uj együttese. Eljárásunkat ennek megfelelően a továbbiakban <u>kétszintü</u> tervezésnek nevezzük. A kibernetikában szokásos elnevezéssel: modellünk olyan szabályozási rendszert reprezentál, amely "negativ visszacsatolással" müködik. A szektor programozása révén kapott árnyékár-rendszer az a visszacsatolás, amely biztositja a központból kiáramló utasitások folyamatos korrigálását.

Mindaz, amit elmondtunk, még nem ad választ arra pontosan, milyen korrekciót kell végrehajtani a központi programon a szektorok visszajelentései alapján? Milyen mértéküek a változtatások, amelyeket egy-egy lépésben a központi előirásokon végrehajtunk?

A kétszintü tervezés módszere erre vonatkozólag pontos eljárási szabályokat, mondhatnánk: recepteket határoz meg. A szabályok egyszerüek, mégsem kivánjuk az olvasót ezen a helyen e szabályok részletes ismertetésével terhelni.* Inkább a kétszintü tervezés néhány jellegzetes, közgazdasági szempontból is figyelemre méltó vonását emeljük ki.

1. Az eljárás alapjául a feladat játékelméleti interpretációja szolgál. Az egyik "játékos" a központ, a másik a szektorok összessége. A játékelméleti interpretáció azon alapul, hogy a helyzet mutat bizonyos analógiát az un. stratégiás játékokkal. Mindkét fél rendelkezik bizonyos információkkal, de nem hozhat egymaga teljesen megnyugtató döntést, mert ehhez ismernie kellene a másik fél információit is. A központnak nagy az áttekintése, de nincs részletekbemenő ismerete azokról a sajátos problémákról /például az egyes szektorokra jellemző speciális alternativ tevékenységekről, azok jellemző müszaki és költségadatairól, a szektorbeli választást korlátozó speciális feltételekről, stb./, amelyeket a szektorok összessége ismer, s megforditva: a szektorok sok részletet látnak, de nincs áttekintésük azokról a nagy összefüggésekről, amelyek csak a központ előtt lehetnek világosak. Akárcsak a stratégiás játékban, a kialakuló szituáció mindkét félen mulik. Mind a központ, mind a szektorok tisztában vannak azzal, hogy a másik "fél" intézkedései is nagy hatást gyakorolnak a helyzetre.

Ilyen körülmények között mindketten keresik azt a stratégiát, amely viszonylag a leginkább megnyugtató mindkét fél számára. Ez a stratégia a játék un. minimax-megoldása. Ez esetünkben az a központi program, amely mellett a népgazdaság összes szektoraiban végbemenő valamennyi tevékenység hozamának összege maximális - és egyuttal az összes központi előirás, továbbá a speciális szektorfeltételekben szereplő valamennyi korlát árnyékárainak összege minimális.

---

* Ez részletesen megtalálható a 6. fejezetben.

Megkiséreljük közgazdaságilag is interpretálni, mit jelent modellünkben a minimax-stratégia meghatározása.*

Tegyük fel, hogy a központ "mindenttudó"; rendelkezik mindazokkal a speciális részletinformációkkal is, amelyek rendszerint csak a szektorok ismernek pontosan. Ezesetben /eszményi számitástechnikai lehetőségek mellett/ egymaga, központilag kidolgozhatná az optimális népgazdasági programot.** Az igy meghatározott optimális népgazdasági programhoz meghatározott célfüggvényérték tartozik, amelyet a továbbiakban optimális népgazdasági hozamnak nevezünk.

Mármost mi a következménye annak, hogy a központ modellünkben /s a valóságban is/ nem mindenttudó, s képtelen egymaga, a szektorok közremüködése nélkül meghatározni az optimális népgazdasági programot? E hiányos információ következménye: a népgazdasági hozam kevesebb az optimálisnál. A szektoroktól "függetlenül" hozott döntés következtében tehát relativ veszteség lép fel; a központ e veszteség csökkentésére törekszik.

A másik oldalon: a szektorok képtelenek önmaguk, a központ irányitó, összehangoló tevékenysége nélkül eljutni az optimális népgazdasági programhoz. A központtól "függetlenül" hozott döntés esetén

- - - - - - - -

* Tulajdonképpen nem lenne szükséges, hogy a dolgozatunkban leirt számitási eljárás közgazdasági interpretációját előadjuk. Megelégedhetnénk azzal is, hogy kimondjuk /s a 6. fejezetben bizonyitjuk/: a 2.1-2.3 szakaszokban leirt modell számitási feladata megoldható olyan eljárással, amely történetesen a játékelmélet keretében kidolgozott tételekkel, számitási módszerekkel kapcsolatos. Ugy gondoljuk azonban: figyelemreméltó, hogy ebben az esetben reálisan értelmezhető, közgazdaságilag interpretálható a játékelméleti modell.

** A 6. fejezetben ezt nevezzük "teljes információs modellnek".

szükségképpen hibás értékelést adnak a nekik juttatott erőforrásokról, keretekről. Tegyük fel ismét egy pillanatra, e gondolatsor folytatása kedvéért, amit már korábban, a duális célfüggvény értelmezésekor feltételeztünk: a szektorokkal "büntetésképpen" megfizettetik azt a többletet, amellyel a nekik juttatott erőforrásokat, kereteket tulértékelték. A hibás értékelés, azaz a hibás árnyékárrendszer ilyen körülmények között sulyos veszteséget jelentene a szektoroknak. A szektorok ezesetben nyilván arra törekszenek, hogy ez a veszteség minél kisebb legyen.

Amint látjuk, mindkét oldalon egyfajta relativ veszteség csökkentésére törekszenek: a központ arra, hogy minél kevésbé maradjon el az optimális népgazdasági hozamtól; a szektorok pedig arra, hogy minél kevésbé lépjék tul az optimális értékeléseket. A minimax-megoldáshoz akkor jutnak el, ha mindkét félnek sikerült ezt a relativ veszteséget kiküszöbölnie.

2. A minimax-stratégia meghatározásához többféle eljárás segitségével juthatunk el. Az egyik ismert módszer az un. <u>fiktiv lejátszás.</u> A dolgozatban javasolt kétszintü tervezési eljárás ezt a fiktiv lejátszást használja a feladat megoldásához. A két játékos fél mintegy "lejátssza" - természetesen csak papiron - a "játékot". A központ "lép": kiad egy központi előirás-együttest a szektornak. Utána a szektorok összessége "lép": visszajelent egy árnyékár-együttest. Utána ismét a központ "lép" és igy tovább. Igy közelednek a játék megoldásához, az optimális programhoz.

A javasolt eljárás biztositja, hogy a célfüggvényérték konvergáljon az optimális célfüggvény-értékhez, azaz valóban <u>közeledjünk</u> a legjobb megoldáshoz. Ez nem jelenti azt, hogy minden egyes lépésben feltétlenül közelebb jutunk, de a lépések egész sorozatát végrehajtva, biztositva van a közeledés az optimumhoz.

Tegyük fel, hogy a 10. lépésnél tartunk. Kitünt, hogy az áramkeret árnyékára a 6. szektorban a legmagasabb. Mi lenne, ha ennek láttán valamennyi szektor áramkeretét elvennénk és minden áramot a 6. szektornak adnánk? A többi szektor képtelen lenne termelni és a 6. szektor képtelen lenne ennyi áramot felhasználni. /Hiszen lehetséges, hogy e szektor többi árnyékára nem volt ilyen kedvező és ezért nem is emelték fel a keretét más anyagokból./ Végeredményben az össz-népgazdasági hozam sulyosan romlana.

Ezért nyilvánvalóan tartózkodni kell az ilyen végletes korrekcióktól. Amikor a 10. korrekciót végrehajtjuk a központi programban, nem szabad elfeledkezni a 9., 8., 7. stb. lépés tanulságairól, arról, hogy a 9. lépésben nem a 6., hanem mondjuk a 4. szektor jelentette a legelőnyösebb áram-árnyékárat, a 8. lépésben az 1. szektor, és igy tovább. A javasolt módszer a "fiktiv lejátszás" módszere, éppen azon a meggondoláson alapul, hogy egy-egy uj lépésnél "emlékezünk" az előző lépésekre. Ezért meghatározott szabályok szerint "keverjük" az egyes lépésekben nyert stratégiákat. Példánkban: az egész energiakeret végletes áthelyezése helyett csupán korrigáljuk a 6. szektor javára az előző lépésekben már kialakitott elosztásokat, azaz bizonyos arányban "keverjük" a minden áramot a 6. szektornak adó stratégiát a korábbi áram-elosztási stratégiákkal.

Hasonlóképpen a szektorok is "keverik" az egyes lépésekben nyert árnyékárakat az előző lépések árnyékáraival, s igy fokozatosan közelednek az optimális árnyékárrendszerhez.

A korrekciók e fokozatossága /a stratégiák "keverése"/ biztositja, hogy az egyes lépésekben ne csapongjunk végletes, gyakorlatilag abszurd programok között, hanem a programokat óvatosan javitva közelitsünk az optimumhoz.

3. A központi programozás logikája igen egyszerü. Vegyük először a termékmérlegeket. Két eset lehetséges:

Az egyik eset: valamely terméknél az ellátási feladat árnyékára nagyobb, mint az ugyanerre a termékre vonatkozó anyagkeretek bármelyikének árnyékára. Átvitt értelemben, csupán a szemléltetés kedvéért azt mondhatnánk: a termék "kinálati ára" magasabb, mint a legmagasabb "keresleti ár". Ez esetben a kinálatot csökkenteni kell, vagyis a központi programot abban az irányban kell korrigálni, hogy a szóbanforgó termékre vonatkozó ellátási feladat csökkenjen.

A másik eset: az ellátási feladat árnyékára alacsonyabb, mint az ugyanerre a termékre vonatkozó anyagkeretek árnyékárai közül a legmagasabb. Az előbbi szóhasználattal: a "kinálati ár" kisebb, mint a legnagyobb "keresleti ár". Ezesetben érdemes a kinálatot növelni, vagyis a központi programot ugy kell korrigálni, hogy az ellátási feladat növekedjék. Ugyanakkor annak a szektornak az anyagkeretét célszerü növelni, amelynél az anyagkeret árnyékára /"keresleti ár"/ a legmagasabb volt.

Még egyszerübb a helyzet a munkaerő-keret esetében. Itt az ujraelosztásnál mindig annak a szektornak a javára korrigálunk, amelynél a leghatékonyabb a munkaerő felhasználása /a legmagasabb a munkaerőkeret árnyékára/.

4. Modellünk szerkezete biztositja - matematikai értelemben -, hogy mindig van megengedett program. Ha másképp nem is, valamennyi központi és szektor-feltétel teljesithető a következő módon: nem termelünk semmit sem, e helyett minden extern fogyasztási előirányzatot szabad importból elégitünk ki. Ehhez nem szükséges sem anyag, sem munkaerő, tehát a mérlegfeltételeket teljesitjük s nem kerül sor egyetlen speciá-

lis szektor-feltétel korlátainak tullépésére sem. E program minden konzekvenciája a célfüggvényben fejeződik ki, amely nyilván sulyosan negativ.

Ha ebből a megengedett programból indulunk ki, ugy a programozási eljárás elején a javitó lépések mindenekelőtt a fiktiv szabad importot szoritják ki, mert ezeknél legsulyosabb a negativ hozam. Eljutunk tehát egy reális programhoz. Utána fokozatosan bekerülnek a programba az importot legelőnyösebben helyettesiteni képes hazai termelő tevékenységek, valamint a hozamot pozitivan javitó export-tevékenységek, s igy közeledünk egy előnyös hazai termelési strukturához.

Ez a közeledés azonban nyilván sokkal gyorsabb, ha ehelyett az extrém induló program helyett egy előnyösebbet választunk és ezt kezdjük el fokozatosan javitani.

Ha már a fiktiv változó kiküszöbölésén tul jutottunk, programunk reális program marad. Ezért a további javitás processzusa bármikor abbahagyható; ez már a realitást nem veszélyezteti.

5. A javasolt eljárás <u>nem</u> szükségképpen véges, de az optimumot tetszés szerinti pontossággal megközelithetjük.

Minden lépésnél megadható egy felső becslés arra, hogy a szóbanforgó lépésben meghatározott program célfüggvény-értéke legfeljebb mennyivel kevesebb, mint az optimális célfüggvényérték.* Másszóval, mi az a maximális megtakaritás, amelyet a programozási eljárás lépéseinek folytatása még hozhat. Ha ez a maximális potenciális megtakaritás már nem tul nagy, ez az eljárás abbahagyható.

Nézetünk szerint ez, mint arra már az első fejezetben utaltunk, gyakorlati célokra elegendő. A gyakorlatban nem szükséges a matematikai

---

* Lásd a 6. fejezet /6,222/-/6,223/ képletét.

értelemben vett szélsőérték-feladat pontos megoldása, az exakt optimum pontos elérése, hanem elegendő annak elfogadható megközelitése is.

6. Az árnyékár, amint ez már fentebb tisztáztuk, nem más, mint valamely feltételi korlát differenciális hozama. A differenciális hozam függvénye a mi modellünk esetében csökkenő függvény. Tegyük fel, hogy a központ növeli valamely szektor munkaerő-keretét, miközben árnyékárait nem változtatja /vagy nem változtatja arányosan/. A többlet munkaerő egy része esetleg foglalkoztatható még a lehető legproduktivabb módon, mert az ehhez szükséges anyagok keretei eredetileg még nem voltak kimeritve. Bizonyos határ felett azonban már kimerülnek az anyagkeretek és további többlet munkaerő foglalkoztatása már csak kevésbé termelékenyebben /modellünkben: kisebb devizatermelékenységgel/ oldható meg. Ujabb munkaerők beállitása még növeli a szektor összes devizahozamát, de a differenciális hozam, azaz a többlet munkaerő devizatermelékenysége csökken. Végül eljutunk egy határhoz, amelyen felül a többletlétszám már nem használható fel az adott anyagkeretek mellett.

A differenciális hozam-függvényeknek ez a természete azzal jár, hogy - programozásunk eredményeképpen - egalizálási tendencia mutatkozik az árnyékárak meghatározott csoportjain belül.*

a/ A különböző szektoroknak azonos időtartamra juttatott munkaerőkeretek árnyékára /ω_{it}/ fokozatosan közeledik egymáshoz. Az egyes lépésekben növeljük azoknak a szektoroknak a keretét, amelyekben magas, s csökkentjük azokat, amelyekben alacsony az árnyékár. Ez azonban, tekintettel a differenciális hozam-függvények csökkenő jellegére, azzal jár, hogy az uj árnyékár esetleg valamivel alacsonyabb lesz ott, ahová

- - - - - - - - -

* Lásd a 6. fejezet 1. tételének b/ pontját.

most többet juttatunk és magasabb ott, ahonnét elvettünk. Ez ujabb és ujabb átcsoportositás, egyenlősités irányában hat. Végeredményben az optimális hozamot /ha elérhetnék/ az jellemezné, hogy a munkaerő-keret árnyékára valamennyi szektorban egyenlő.

b/ Hasonló egalizálási tendencia érvényesül a különböző szektoroknak /i=1,...,n/ azonos időszakra juttatott j-edik anyagkeret árnyékárai /ξ_{ijt}/ között is*.

c/ Végül: az egyenlőség felé tart azonos időszakra vonatkozóan valamely szektornak adott ellátási feladat árnyékára /ξ_{it}/ és e szektor termékéből kiutalt anyagkeret árnyékára /ξ_{ijt}/ is. Tehát például az áramtermelő szektornak adott áramellátási feladat árnyékára és a többi szektornak adott áramkeretek árnyékára is egalizálódik. Az optimális programban az áramnak már csak egy árnyékára lenne, akár, mint kibocsátási ár /az áram ellátási feladat árnyékára/, akár mint ráforditási ár /valamely áramkeret árnyékára/.

Ezek az egalizálási tendenciák csak az azonos időszakra vonatkozó árnyékáraknál érvényesülnek. Viszont rendszerint nem lesz azonos ugyanazon tényező, például a munkaerő-keret vagy valamely meghatározott anyagkeret árnyékára az 1. és az 5. időszakban. Ezzel kapcsolatban érdemes tanulmányozni az egymást követő időszakok árnyékárainak arányait.

- - - - - - -

* Ez egyébként megfelel az erőforrások optimális elosztásával foglalkozó irodalom egyik közismert tételének: az erőforrások optimális elosztására az jellemző, hogy differenciális hozamaik a felhasználás minden területén egyenlőek. /Lásd például: Lerner [14] művét./

it.*

Érdemes még felhivni a figyelmet a következőkre. Hasznos lesz tanulmányozni az egalizálás folyamatát, az árnyékárrendszer hullámzását az iteráció során. Melyek azok az árnyékárak, amelyek hullámzása, rezgése aránylag csekély, amelyek viszonylag hamar "megnyugszanak" és melyek az érzékenyebb, ingatagabb, labilisabb árnyékárak? Utóbbiaknál meg kell figyelni: a központi program milyen módositásainak következtében megy végbe ingadozásuk? E megfigyelés módot ad következtetések levonására a népgazdasági terv biztosabb, más tervelőirányzattól viszonylag függetlenebb részeire és bizonytalanabb, más tervelőirányzatoktól erősen függő részeire vonatkozóan.

----

* Ezekből az árnyékár-arányokból ugyanis meghatározható egy diszkontláb-rendszer, mégpedig termékenként különböző és időszakról-időszakra változó diszkontlábak rendszere. Az i-edik termék diszkontlába a /t, t+1/ időszakban:

$$1 - \frac{\xi_{it}}{\xi_{i,t+1}}$$

3. A GYAKORLATI ALKALMAZÁS PROBLÉMÁI

Az alábbiakban nem kivánunk a gyakorlati alkalmazás részletkérdéseivel foglalkozni, csupán néhány fontosabb, általánosabb jelentőségü problémára szeretnénk rávilágitani.

3.1 A kétszintü tervezés összekapcsolása az eddigi módszerekkel

A tanulmányban javasolt kétszintü tervezés többféle módon is összekapcsolható az eddigi tervezési módszerekkel.

1. Amint arra már rámutattunk, programozási modellünk egyes konstansait - elsősorban az extern fogyasztás, az átmenő beruházási feladatok és a népgazdasági munkaerő-keretek adatait - gazdaságpolitikai előirásként, korábbi tervszámitásokból meritettük és épitettük be saját számitásunkba.

2. Az előző fejezetben rámutattunk arra, hogy az optimumhoz való közeledés gyorsaságát jelentős mértékben befolyásolja: milyen első központi programból indulunk ki. Az egyik kinálkozó lehetőség: kiindulhatunk a szóbanforgó tervidőszakra a tervezés hagyományos eszközeivel kidolgozott központi programból. Ez esetben az első lépés: a központi előirások alapján elkészülnek az első szektor-programok. Ez egyuttal kritikája a központi program realitásának. Amennyiben az eredeti központi program közgazdaságilag kiegyensulyozatlan, ugy az első lépésben nyert szektor-programokban megjelennek a fiktiv szabad importok. Az eljárást folytatva a különböző lépések először is egyensulyba hozzák a tervet, kiküszöbölik a fiktiv változókat, azaz irreális terv helyébe reális tervet alakitanak.* Később az eljárás fokozatosan javitja a tervet, kedvezőbbé teszi a deviza-mérleget.

- - - - - - - -

* Amennyiben a fiktiv változókat nem sikerült kiküszöbölni, ugy ez annak a jele, hogy a központi és a szektor-modellek feltételi rendszerében ellentmondás van. Például az előirt extern fogyasztás nem teljesithető az adott népgazdasági létszámkeret mellett, stb.

A népgazdasági tervezés gyakorlatában többnyire rendkivül nagy erőfeszitést igényel egy egyensulyban lévő "megengedett" terv kidolgozása. Ha már egy egyensulyban lévő tervhez eljutottak, itt esetleg abba is hagyják a tervezés munkáját, mert ezzel kimerült a rendelkezésre álló idő és erő. A javasolt programozási eljárás esetén azonban ez csak a kezdet; éppen ezután - egy egyensulyban lévő tervet már elérve - kezdődik meg a terv módszeres javitása, közelitése az optimum felé.

3. Ma már a népgazdasági tervezés rendszeresen alkalmazott módszerének tekinthető az ágazati kapcsolati mérleg. Az induló központi programban szereplő anyagelosztás, azaz a /2.1/ képletben leirt mérlegrendszer, meghatározható az ágazati kapcsolatok mérlege segitségével. Ez bizonyára jó eszköz egy reális induló program meghatározásához.

Tanulságos lesz megfigyelni, miben különbözik a programozási eljárás lezárásakor kialakitott termékmérleg-rendszer attól az induló termékmérleg-rendszertől, amelyet az input-output-tábla segitségével határoztunk meg.

Egyébként - amint az az agregációról szóló későbbi szakaszból kitünik majd - modellünk termékmérleg-rendszere kevésbé tagolt, mint a nálunk szokásos input-output tábláké. Nem is feladata a termékáramlás arányosságainak részletes megtervezése. Ebből a szempontból is hasznosan kiegésziti egymást a javasolt programozási módszer és a termékáramlás arányosságait részletesebben reprezentáló ágazati kapcsolati mérleg /valamint esetleg a még részletesebb "hagyományos" termékmérleg-rendszer/.

Ugyancsak felhasználható az ágazati kapcsolatok mérlegének adatanyaga a reprodukáló jellegü tevékenységek jellemzéséhez, különösen azokban a szektor-modellekben, amelyekben csupán egyetlen, a szektor egészére jellemző reprodukáló tevékenység szerepel.

4. A tervezésben szokásos, a beruházási döntések megalapozására szolgáló okmányok, az un. "beruházási programok" nem egy-egy szektor egész beruházási tervét fogják össze, hanem csak valamely létesitmé-

nyét, vagy létesitmény-komplexumát. Egy-egy ilyen beruházási program alapul /vagy még inkább: több ilyen program együttesen/ felhasználható a szektor-modellek egy-egy beruházási jellegü tevékenységének, változójának számszerü jellemzésénél, a feltételekben és a célfüggvényben szereplő együtthatók meghatározásánál.

3.2 A döntési szféra leszükitése

A 2. fejezetben leirt modell átfogja a népgazdaság egész termelő és beruházási, valamint külkereskedelmi tevékenységét*. Ez azonban nem szükségszerü, a feladat leszükithető. Különösen az első gyakorlati kipróbáláskor érdemes lehet a döntési szférát szükebbre vonni.

Megtehetjük például azt, hogy csupán az ipar termelő, beruházási és külkereskedelmi tevékenységét programozzuk. Ez esetben a mezőgazdasággal kapcsolatos előirányzatokat is gazdaságpolitikai előirásként kezeljük. Egyfelől: a létszámkerethez hasonló módon állitjuk be a központi feltételi rendszerbe a mezőgazdasági termékek mérlegét. Minden szektornak adunk mezőgazdasági termékkeretet, s ezeket az eljárás során lépésről-lépésre módosithatjuk, de az ipari szektorok számára összesen jutó mezőgazdasági termékek mennyiségét, az ipar összes mezőgazdasági termék-keretét adottnak, gazdaságpolitikai előirásnak tekintjük. Másfelől: a mezőgazdaság termelőfelhasználásához szükséges ipari termékek mennyiségét az extern fogyasztás részének tekintjük. Az ipari szektorokat tehát kötelezzük arra, hogy a személyes és közületi fogyasztás /valamint az átmenő beruházások/ mellett a mezőgazdasági termelő-fogyasztás igényeit is elégitsék ki.

A 2. fejezetben leirt modell nyilt mind a két irányban. Vannak külső erőforrások és külső felhasználások, amelyek volumene a modellen

- - - - - - - -

* Kivéve az extern fogyasztás céljait közvetlenül szolgáló nem-kompetitiv importot /például déligyümölcs importja/. Mivel ez nem helyettesithető hazai termeléssel, modellünkön belül ezzel kapcsolatban nem nyilik választási lehetőség.

kivül meghatározott exogén nagyság. Ha a programozási feladatot praktikus okokból, a munka egyszerüsitése érdekében, szükiteni akarjuk, ugy kiszélesithetjük a külső erőforrások és külső kihasználások körét és ennek megfelelően szükithetjük az eljárás keretében programozott tevékenységek szféráját.

3.3 A kiinduló adatok módositása

A programozás során bizonyos adatokat gazdaságpolitikai előirásként, konstansként épitünk modellünkbe. Persze a gyakorlatban ezek nem szigoruan konstansok. Nyilvánvaló, hogy a személyes és közületi fogyasztás előirányzata nem megváltoztathatatlan adat. Nem is csak megtervezésének nehézségei miatt, hanem, mert - megfelelő gazdaságpolitikai beavatkozással - a fogyasztás szerkezete módositható. Bár kisebb mértékben, de ugyancsak befolyásolható a termelőmunkára jelentkező munkaerők létszáma is. Ezért szóbajöhet e gazdaságpolitikai előirások módositása.

Az optimális programban, mint emlitettük, egy-egy terméknek már minden szektorban azonos az árnyékára. Ez az árnyékár azt fejezi ki, hogyan hatna a népgazdaság összes célfüggvény-értékére, azaz összes devizahozamára, ha egységnyivel csökkentenénk az extern fogyasztást, vagyis az export és a termelő-felhasználás elől elvont termékmennyiséget. Ennek az árnyékárnak az ismeretében fontolóra vehetjük, érdemes-e módositani az extern fogyasztás előirását; összes terjedelmét, vagy adott terjedelmen belül a fogyasztás szerkezetét, összetételét. /Például ugy, hogy csökkentjük a hazai személyes fogyasztást olyan termékből, amelynek árnyékára magas és ezt olyan termékkel pótoljuk, amelynek árnyékára alacsonyabb./

Hasonlóképpen lemérhetjük a népgazdasági munkaerő-keret módositásának hatását is a munkaerő árnyékárán.*

- - - - - - - -

* "Egyszintü" tervezés szokványos lineáris programozása során ehhez hasonló problémákat paraméteres programozással szoktak vizsgálni. Kutatási feladatunknak tekintjük annak vizsgálatát, hogyan végezhető paraméteres programozás "kétszintü" tervezés esetén.

Igaz, hogy az optimális program, s ezzel együtt ez a teljesen egalizált-optimális árnyékár-rendszer nem határozható meg pontosan eljárásunk segitségével. Jó közelités esetén azonban, ha már nem vagyunk messze az optimumtól, megfelelő becslést adhatunk ezekre az árnyékárakra. E becslés elegendő indokot adhat a gazdaságpolitikai előirások emlitett módositásaihoz.

Mód van arra, hogy a programozási eljárás közben, a közbeeső eredmények alapján módositsuk a gazdaságpolitikai előirásokat. Ez azonban megszakitja az iterációt. Természetesen megtehetjük ilyenkor, hogy az eredeti gazdaságpolitikai előirások alapján végzett utolsó lépés központi programját tekintjük az uj módositott gazdaságpolitikai előirás alapján végzett programozás induló programjának, s ujra kezdjük az iterációt.

Ez egyébként nemcsak ebben az esetben van igy. A 6. fejezetben pontosan ismertetjük az iteráció során alkalmazandó szabályokat. Mód van azonban arra is, hogy a központi program javitását "irregulárisan", a leirt szabályoktól eltérően végezzük. /Például a szabályos korrekció után az energiatermelés gép-keretének egy milliárd forinttal kellene növekednie. E helyett 1,5 milliárd forinttal növeljük, mert számitunk arra: későbbi korrekciós lépések amugy is továbbnövelik majd./ Elképzelhető, hogy egyes esetekben a gyakorlati tervezők rutinja szerencsésebb korrekciót képes végrehajtani a központi programon, mint a merev szabály, s ez végeredményben gyorsitja az iterációt. Sajnos azonban megtörténhet az is, hogy az ilyen irreguláris korrekció nem gyorsitja, hanem lassitja az iterációt. Az optimumhoz való közeledésre, a konvergenciára /jelenlegi ismereteink mellett/ csak akkor számithatunk biztosan, ha pontosan betartjuk a 6. fejezetben leirt eljárási szabályokat.* Tehetünk tehát irreguláris lépéseket is a központban, de a folyamat meglassitásának kockázatával. Minden esetre az irreguláris korrekció után nyert uj központi programra ugy kell tekinteni, mint egy uj iterációs folyamat induló programjára. Ha ezek után nem teszünk ismét szabálytalan, irreguláris lépést, akkor ettől kezdve a konvergencia /az eredeti folyamatnál gyorsabban vagy lassabban/ végeredményben mégis biztositható.

- - - - - - - -

* A 6. fejezetben leirt eljárás fogyatékossága, hogy az iteráció előreláthatóan nem lesz tul gyors. További kutatást igényel, milyen módon lehetne az iterációt gyorsitani. Egyebek között milyen módon lehetne a szektoroktól könnyen megszerezhető kiegészitő információkat felhasználni az iteráció gyorsitására.

3.4 A számitástechnikai lebonyolitásról

A kétszintü tervezés lebonyolitásának ideális számitástechnikai feltételei a következők:

Minden szektor és a központ is, saját elektronikus számológéppel rendelkezik. Megfelelő összeköttetés van a szektorok és a központ számoló csoportjai között. /Például az adatok továbbithatók gépről-gépre, a központból a szektorhoz, vagy a szektorból a központba közvetlenül lyukszalagon, a telexhálózaton keresztül./ Ez esetben a szektor-programozások egy időben, párhuzamosan folyhatnak. Amennyiben a központi programozást is elektronikus gépen oldjuk meg /ami nem feltétlenül szükséges, de persze lehetséges, s a számitási időt nyilván röviditi/, egy-egy lépés, beleértve az információ továbbitását is, néhány óra alatt megoldható /a jelenlegi megyarországi gépek sebességével számolva/.

Természetesen ez megkövetelné a géppark kibővitését. Addig is a feladat megoldható kisebb technikai apparátussal is. Tehát például több szektor programját egymásután számitjuk ki ugyanazon a gépen; az adatokat leirva juttatjuk el a központból a szektorokhoz és vissza, stb. Ez nyilván lassitja a számitást, de azért nem akadályozza meg a gyakorlati megvalósitást. A számitástechnikai lehetőségek determinálják a modell méreteit is. A következőkből indulhatunk ki:

Hazai gépeken előreláthatólag megoldható 50 feltételes, 100 változós, sőt esetleg ennél nagyobb általános lineáris programozási feladat is. Induljunk ki ebből az utóbbi méretből. Reálisnak tekinthető, hogy egy-két éven belül nem egy, hanem több legalább ilyen teljesitményü /azaz világ-szinvonalon: közepes méretü/ géppel rendelkezünk majd. Ebből következik, hogy a szektor-modellek kb. 50 feltételesek lehetnek majd.

A szektor-modellek mérete determinálja a központi modell méreteit is. Tegyük fel, hogy szektoronként 8-10 speciális feltétel van. Ez esetben legfeljebb 40-42 központi feltételünk lehet.

A távolabbi perspektivák még biztatóbbak. A Szovjetunióban, a "BESZM-2." gépen most folyik - a MTA Számitástechnikai Központjának felkérésére - egy 126 feltételes, 310 változós lineáris programozási feladat megoldása. Nyugati országokban megoldottak már 300 feltételes programozási feladatokat. Semmiképpen sem tulzott tehát az a várakozás, hogy a későbbiekben a központi feltételek száma 100 vagy 200 fölé mehet.

4. A MODELL MÓDOSITÁSAI - KÉTSZINTÜ TERVEZÉSSEL MEGOLDHATÓ MÁS FELADATOK

A 2.1 és 2.3 szakaszokban leirt dinamikus népgazdasági tervezési modell konkrét példa a kétszintü tervezés módszerének alkalmazására. A kétszintü tervezés módszerének alkalmazási területe azonban jóval szélesebb ennél. Sokféle modell, sokféle programozási feladat oldható meg ennek az eljárásnak a segitségével.

A 6. fejezetben ismertetünk egy általános modellt. A kétszintü programozás módszere felhasználható minden olyan konkrét feladathoz, amelynek jellegzetességei megfelelnek az általános modell ismérveinek, amelyek tehát az általános modell speciális esetét képezik. Tanulmányunk most következő fejezetében azonban eltekintünk a természetszerüleg nagyon absztrakt általános modell leirásától. Ehelyett a 2. fejezetben ismertetett modell kiegészitésére további konkrét modelleket vázolunk fel:

A 4.1 és 4.2 szakaszokban a 2. fejezetben leirt dinamikus népgazdasági modell kisebb, részleges módositásait tárgyaljuk, mig a 4.3 szakaszban ettől erőteljesebben eltérő, más közgazdasági tartalmu modellekkel foglalkozunk. Mindezekre a módositásokra, más modell-tipusokra azonban csupán röviden utalunk; részletes kidolgozásuk nem ennek a tanulmánynak a feladata.

4.1 A célfüggvény módositása

A 2.3 szakaszban leirt célfüggvény alkalmazása több szempontból is problematikus, vitatható.

A javasolt célfüggvény az egész tervidőszak összes devizahozamát összegezi. Ezzel szemben felvethető: nem közömbös, hogy a devizahozam a tervidőszak elején vagy végén merül-e fel. A korábban felmerülő külkereskedelmi aktivum például felhasználható beruházási javak importjára, vagy esetleg külföldi adósságok törlesztésére, külföldi hitel nyujtására; egyszóval hatékonyan gyümölcsöztethető.

Ennek a meggondolásnak az alapján felvethető, hogy ne az egész tervidőszak devizahozamának egyszerü összegét, hanem annak diszkontált összegét maximalizáljuk. Kamatlábként kinálkozik speciálisan ebben az összefüggésben a külföldi adósságok után fizetendő kamat, annak a meggondolásnak az alapján, hogy a programozás eredményeképpen keletkezett többletdeviza felhasználható az adósság törlesztésére.

De nem is csak az időbeli lefolyás problémájáról van szó. A célfüggvény-együtthatók sajátos sulyrendszert képeznek, amelyekkel az előirt extern fogyasztás feletti többletet értékeljük. Ez azonban nem az egyedül lehetséges sulyrendszer; elképzelhetők mások is. Lássunk egy példát:

A központi modell feltételei közé veszünk egy vagy több devizamérleget, s kihagyjuk a feltételek közül a munkaerőmérleget. E helyett célfüggvényként irjuk elő az össz-munkaráforditás minimalizálását.

E megoldás előnye: modellünk igy kevésbé "kifelé forduló"; csupán a gazdaságpolitikailag előirt mértékig javitja a devizamérleget, s nem ennek javitását helyezi a számitás középpontjába. Hátránya: problematikus a programozás eredményeképpen esetleg felszabaduló munkaerők foglalkoztatása. A 2. fejezetben leirt modell esetén a központi munkaerő-mérleg feltehetően egyenlőségre teljesül, a munkaerőt érdemes teljesen foglalkoztatni mindaddig, amig egyáltalán lehetőség nyilik a devizahozamot javitó tevékenységre. Ezzel szemben a most vázolt munkaráforditás-minimalizálási modell esetén a munkaerő-források egy része éppen a programozás optimalizálási törekvése nyomán válik felhasználatlanná. Ez esetben a foglalkoztatást külön intézkedésekkel kell biztositani.

A 2. fejezetben és az itt leirt célfüggvények közös vonása: a hazai árrendszert csupán a szektoron belüli összegezések céljaira használja fel. /Tehát például a vegyiparban a különféle vegyitermékeket a forint-árak segitségével összegezzük "általános vegyitermékké"/. Viszont többé-kevésbé megkerüljük a forint-árrendszert az alapvető döntési problémánál: a szektorok közötti arányok kialakitásának mérlegelésénél. E helyett ugyanis az export-importárak, illetve a most javasolt célfüggvény esetén a munkaráforditások képezik a célfüggvényben szereplő sulyrendszert.

Természetesen felmerülhetnek olyan javaslatok is, amelyek az utóbbi sulyrendszer céljaira is a forint-árrendszert kivánják alkalmazni. /Például nemzeti jövedelem maximalizálása, népgazdasági költség minimalizálása, stb./ A javasolt matematikai programozási módszer, a kétszintü tervezés alkalmazása ilyen célfüggvények mellett is lehetséges. Közgazdasági szempontból azonban ezek a célfüggvény-tipusok kevésbé előnyösnek tünnek, mint az eddig emlitett másik két tipus.

4.2 Az aggregáció

Mint minden modellnél, a mi modellünk megszerkesztésénél is az aggregáció jelenti az egyik legnehezebb kérdést. Milyen mély bontásban, illetve milyen szélesen összevonva kezeljük a különféle tevékenységeket, gazdasági összefüggéseket?

E kérdést mindjárt gyakorlati oldaláról közelitjük meg, a következő elv lerögzitésével:

Modellünket ugy kell felépiteni, hogy a lehető legmélyebben tagolt legyen - de még mindig képesek legyünk megoldani a magyarországi gépparkon.

Ezzel kapcsolatban külön kell választanunk a jelen /a legközelebbi 1-2 év/ s a távolabbi jövő lehetőségeit. Amint a 3.4 szakaszból kitünt, reális az a távolabbi perspektiva, hogy 100-200 feltételes modelleket oldjunk meg. Ezért lehetséges lesz majd olyan dinamikus népgazdasági tervezési modellt kidolgozni, amelyben mondjuk négy-öt időszak és 40-50 szektor van. Ez bőven kielégiti a tervezés igényeit. Egyenlőre azonban a legközelebbi jövőben, ennél szükebbek a lehetőségek. Ha máris hozzá akarunk kezdeni az első kisérlethez, akkor a jelenlegi hazai elektronikus géppark adottságai mellett olyan számitást végezhetünk, amelyben kb. 40-42 feltétel van a központi modellben. Megtartva a 2. fejezetben leirt központi modell szerkezetét, ez gyakorlatilag a következőket jelentheti:

1. Először a szektorbontás mélységét kell tisztáznunk. A dinamikus modell elgondolásunk szerint a népgazdaságot kb. 12-14 szektorra tagolja. A szektorok: a termelő minisztériumok, illetve ezen belül a na-

gyobb és összetettebb tárcák két, vagy több részre tagolva /például a KGM kohászatra és gépiparra, a NIM energiatermelésre, bányászatra és vegyiparra, stb./. Az elhatárolások részleteibe itt nem bocsátkozunk, ez később konkrétan tisztázható. A tervidőszak 3 időszakra osztható.

A 12-14 szektorra tagolt népgazdasági program - dinamikus modell esetén - alkalmas a legfontosabb fejlesztési arányok megtervezésére. Emellett az a tény, hogy a szektorokon belül mintegy 50-60-féle gazdasági tevékenység, s ezek között 20-40 beruházási fő irányvonal, koncepció között választhatunk /ehhez járul majd 40-50 maradék-változó/, elég széles választási lehetőséget biztosit.

Tagadhatatlan azonban, hogy ez igen erős aggregációt jelent. Ezért felvetődhet az a gondolat, hogy - legalábbis összehasonlitásul - más modell-tipussal is számoljunk. Ebben nem vizsgálnánk a beruházási, termelési és külkereskedelmi tevékenységek ütemezését, csupán a tervidőszak végére kialakuló legkedvezőbb strukturát határoznánk meg*. Ebben az esetben nem szükséges a mérlegek számának megsokszorozása, csupán egy-egy mérleget kell előirni minden termékből és erőforrásból a tervidőszak végére. /Persze ilyenkor külön limitálni kell a beruházási jellegü erőforrásokat is, beruházási keret, stb. beépitésével./ Ez a modell-tipus lehetővé teszi, hogy a népgazdaságot mintegy 35-40 szektorra tagoljuk.

Vitatható, hogy gyakorlati alkalmazás esetén melyik modell-tipussal kezdjük. Az adatgyüjtés feladatai a dinamikus modelleknél kisebbek, hiszen a modell méreteit azonos numerikus adatokra épülő feltételek és változók egyszerü megsokszorozása /a lefolyás időpontja szerinti módositása/ növeli. Tehát például ugyanaz a beruházási tevékenység szerepel többször a modellben aszerint, hogy a megvalósitás az 1., 2., 3., 4., vagy 5. időszakban kezdődik-e meg. Többek között ez a szempont is amellett szól, hogy az első kisérletet ilyen modellel végezzük. Később célszerü lesz majd mindkét modell-tipussal - a dinamikus és a befejező időpontra szóló modell-tipussal - párhuzamosan számolni, és az igy nyert információk összehasonlitó elemzésére alapozni a gyakorlati döntést.

2. Bizonyos fokig elválasztható egymástól a szektorok és a termékek bontásának kérdése. Amennyiben a nem-dinamikus, befejező időpontra szóló

- - - - - - - -

* Ezt a modell tipust alkalmaztuk a pamutipari, müszálipari és aluminiumipari távlati programozásokban. /Lásd [12], [11] és [15] / Ezek szintén a tervidőszak végére kialakuló struktura meghatározására szolgálnak.

modell-tipust alkalmaznánk, mód van arra, hogy a modellt a következőképpen bővitsük:

Nem bontjuk fel a népgazdaságot a maximális mértékben, az említett 35-40 szektorra, hanem ennél erősebb összevonást alkalmazunk. /Például 15-20 szektort képezünk./ Viszont feloldjuk azt az erős egységesítő feltevést, hogy minden szektor egyetlen "terméket" /általános, tipikus termékcsoportot/ állít elő. Ehelyett egy-egy szektor termelését, legalábbis a legkevésbé homogén szektorokét, néhány fő termékre /tipikus termékcsoportra/ osztjuk. Ennek megfelelően minden fő termékre külön központi termékmérleget irunk elő, s a szektoroknak ezekre vonatkozóan külön anyagkeretet adunk. Ebből következik, hogy a több terméket előállító szektoroknak nem egy, hanem több ellátási feladatot kell kapniok központi előirásként. A modell ilyen tagolása módot ad a termékáramlás részletesebb tervezésére, az arányosságok pontosabb biztositására anélkül, hogy az önálló szektor-modellek számát ezzel arányosan szaporitanánk.

Bármilyen módon viszonyuljon azonban egymáshoz a szektorbontás és a termékbontás, végeredményben a modellben szereplő termék mindenkor valamilyen szélesebb gyártmánycsoport aggregátumát jelenti. Ezért nagyjelentőségü a gyártmánycsoport feltételezett összetételének meghatározása, mert ez rányomja bélyegét a szektor numerikus jellemzőire.

Amennyiben jól elfogadható, reális induló programunk van /például hagyományos módszerekkel kidolgozott, egyensulyban lévő népgazdasági terv/, ugy ennek alapján határozhatjuk meg a feltételezett gyártmányösszetételt az egyes szektorokban. Pl. a vegyipar feltételezett gyártmány-összetételét ugy állapitjuk meg, hogy figyelembe vesszük az induló program szerint a vegyipar termelésének mekkora része kerül a mezőgazdaságba, a bányászatba, a gépiparba, a kohászatba, stb. Utólag, a programozási eljárás befejeztével ellenőrizhetjük, vajon ez a feltételezés nagy mértékben eltér-e a programozás alapján meghatározott kibocsátási szerkezettől. Ha az eltérés tul nagy, akkor kénytelenek leszünk az uj, modositott szerkezet alapján ujra programozni.

3. Az aggregáció kérdéséről szólva megemlitjük a külkereskedelmi relációk tagolásának vagy összevonásának problémáját. A 2. fejezetben leirt modell központi feltétel-rendszerében nem szerepeltek kötelező

deviza-mérlegek. A deviza-mérlegek javitásának követelménye kizárólag a célfüggvény révén jut kifejezésre. Ez persze feltételezi - s ez erős egyszerüsités -, hogy a népgazdaság számára mindegy, milyen relációban merül fel a bevétel, illetve a kiadás, csupán valamennyi külkereskedelmi bevétel és kiadás közös /devizaárfolyamok segitségével közös dimenzióra hozott/ szaldójának javitására törekszünk.

Nincs azonban akadálya annak, hogy a központi feltételrendszerbe deviza-mérlegeket is felvegyünk. Például a feltételek között előirjuk a rubel-mérleg meghatározott egyenlegét s a célfüggvény révén kizárólag a dollár-mérleg javitására mozgósitunk /vagy megforditva/. Esetleg mindkét mérleg minimális pozitiv /vagy maximális negativ/ egyenlegét előirjuk a feltételek között s a célfüggvényben a két reláció közös, alkalmas devizaárfolyammal közös dimenzióba hozott egyenlegének javitására mozgósitsunk.*

4. Végül biztositható az is, hogy a munkaerőforrásokat ne kizárólag egyetlen központi feltétellel korlátozzuk. Esetleg beépithető a munkaerővel kapcsolatos más korlátozó feltétel is: például összes munkaidő kerete, összes béralap kerete, stb. Egyes szektormodellekben speciális feltételként különleges szakképzettségü munkaerők keretét irhatjuk elő.

Népgazdasági béralap-keret előirása módot adna arra, hogy a modellen belül alakitsunk ki összhangot a béralap /s ezzel együtt a vásárlóerő/ és az árualap, azaz az extern fogyasztásban figyelembe vett személyes fogyasztás között. Ez biztositja, hogy a béralap ne legyen több, mint az ennek fedezésére előirányzott árualap. Amennyiben a program béralapot takaritana meg, akkor a programozás után <u>külön</u> megfontolhatja a gazdasági vezetés a teendőket /felemeli a bérszinvonalat, csökkenti az extern fogyasztásban előirányzott személyes fogyasztási árualapot stb./.

Nem feltétlenül szükséges azonban ezt az arányosságot modellünkön <u>belül</u> biztositani. Amint azt az 1. fejezetben hangsulyoztuk, nem tö-

- - - - - - - - -

* Amennyiben ilyen deviza-mérlegeket épitünk a központi feltétel-rendszerbe, ugy további fiktiv változókat kell besorolnunk a szektormodellek változói közé, amelyek biztositják, hogy mindenképpen legyen - matematikai értelemben - megengedett, azaz egyebek között a deviza-mérleg-feltételeket is teljesitő program.

rekszünk arra, hogy a népgazdasági terv minden előirányzatát egyetlen modell keretében programozzuk. Maga a munkaerő-korlát is jelent egyfajta /igen hozzávetőleges/ korlátozást a bérigények számára is; a vásárlóerő-árualapmérleg összefüggéseit modellünkön kivül is tervezhetjük. Ez ismét egyike azoknak a részletkérdéseknek, amelyeket a modell gyakorlati alkalmazása előtti konkretizálás során kell majd eldönteni, elfogadható kompromisszumot keresve a modell teljességének és számitástechnikai megoldhatóságának két /egymásnak ellentmondó/ követelménye között.

Az aggregációról szólva befejezésül még hangsulyozni szeretnénk: azok a nehézségek, amelyekkel most, az első kisérlet alkalmával meg kell küzdenünk, részben átmenetiek, s a számológép kapacitás növekedésével enyhülni fognak. De talán nem is árt, ha az első kisérlet alkalmával egy aránylag aggregáltabb modellel dolgozunk. Igaz, ez csökkenti a programozás tartalmasságát, de ugyanakkor lényegesen megkönnyiti az adatgyüjtést. Márpedig ez nagyon is szükséges, éppen az uttörő kisérlet alkalmával.

Érdemes még megemliteni a nehézségek leküzdésének egy másik utját is: kétszintü tervezés helyett háromszintü tervezési eljárást kell kidolgozni. A gyakorlatban a tervezés jelenleg is legalább három szinten /a központban, a minisztériumban és az iparágban/ vagy esetleg négy szinten /az előbbiek mellett az üzemben is/ folyik. Hasznos lesz a kutatást ebbe az irányba is kiterjeszteni.

4.3 Más közgazdasági tartalmu modellek

A tanulmány eddigi részében minden esetben olyan programozási feladatról szóltunk, amely a hosszulejáratu népgazdasági tervezést szolgálja. A kétszintü tervezés módszere azonban alkalmazható más feladatokhoz is.

1. A módszert felhasználhatjuk rövidlejáratu tervek megalapozásához.

2. A tervezés két szintje nem szükségképpen népgazdaság és termelő minisztérium /vagy az utóbbi egy része/, lehet a két szint ennél magasabb:

például Kölcsönös Gazdasági Segitség Tanácsa és az egyes országok, vagy lehet a két szint ennél alacsonyabb: minisztérium - vállalat, vállalat - mühely, stb.

Külön figyelemre méltó ebből a szempontból a módszer alkalmazása a KGST-országok távlati fejlesztési terveinek összehangolására. A kétszintü tervezés matematikai módszert adhat ahhoz, hogy az egyes országok által önállóan kidolgozott terveket /"szektor programokat"/ egyeztessék és megfelelő korrekciókkal, átcsoportositásokkal, közös optimalizálási szempontok szerint javitsák.

3. A módszer felhasználható egyes nagyméretü regionális tervezési, telepitési és szállitási problémák megoldására. Ez esetben a szektor valamilyen <u>területi egység;</u> a központ e területi egységek programját hangolja össze közös feltételek alapján.

4. A módszer felhasználható nagyméretü ütemezési programok megoldására. Ez esetben a szektor valamilyen <u>időszak;</u> a központ a különböző időszakokban lezajló tevékenységeket hangolja össze.

5. Tanulmányunkban eddig átfogó tervezési feladatról volt szó, amely kiterjedt a tervezésre, beruházásra és külkereskedelemre. A módszer azonban felhasználható egysiku tervezési feladatokra is. Igy például konkrétan felmerült az az elgondolás, hogy e módszer segitségével dolgozzunk ki a pamutszövet-export rövidlejáratu programját, optimális cikk-szerinti és reláció-szerinti összetételét.* A pamutszövet-export programozásának csak akkor van gyakorlati értelme, ha nagyon részletes, mert erős összevonás esetén elsikkadnak a cikkek és relációk közötti különbségek. Viszont a részletes modell igen nagy s nem oldható meg egyetlen központi programozással, ezért célszerü lehet kétszintü tervezés alkalmazása. A Központ: a pamutszövet-export strukturáját kialakitó ipari és külkereskedelmi szerv; a szektorok: a pamutszövetek egy-egy csoportjának előállitására alkalmas gépek csoportjai.

- - - - - - - -

* A vizsgálat a HUNGAROTEX Külkereskedelmi Vállalat keretében folyik, Nagy András vezetésével.

5. ÖSSZEHASONLITÁS MÁS ELGONDOLÁSOKKAL

Röviden összehasonlitjuk a tanulmányban leirt módszert a szakirodalomban ismert más olyan elgondolásokkal, amelyek ugyancsak matematikai módszereket alkalmaznak a népgazdasági tervezésben. Nem tekintjük feladatunknak más szerzők munkájának részletes méltatását, vagy birálatát, kizárólagos célunk az összehasonlitás, hogy az olvasó előtt igy világosabbá váljanak saját javaslataink speciális vonásai.

5.1 Az ágazati kapcsolatok mérlege

A központi tervek kidolgozásához eddig csupán egyféle matematikai eszközt vettek igénybe a gyakorlatban: az ágazati kapcsolatok mérlegét, a közismert statikus input-output modellt. Ennek alkalmazása elősegiti a "hagyományos" módszerekkel kidolgozott népgazdasági terv belső összhangjának, arányosságának ellenőrzését, az általános egyensulyt megzavaró tényezők felismerését.*

A kétszintü tervezés gyakorlati alkalmazása során is fel akarjuk használni kisegitőeszközként az ágazati kapcsolatok mérlegéből nyert információkat. Erről részletesen szóltunk a 3.1 szakaszban. Ugyanakkor ki kell emelnünk azokat a lényeges eltéréseket, amelyek modellünket az input-output-modellektől megkülönböztetik:

1. Az ágazati kapcsolati mérlegnek modellje, mint ismeretes, nem ad módot arra, hogy adott végső kibocsátási feladat különböző alternativ, egymást helyettesitő megoldási lehetőségei között, gazdasági hatékonysági kritériumok szerint válasszunk. Feltételezi, hogy meghatározott kibocsátás mindig azonos mértékü és összetételü ráforditást igényel. Ha tehát előirtuk a végső kibocsátást, ezzel már eleve eldöntöttük a termelő tevékenységek és a ráforditások egész strukturáját. A

- - - - - - - -

* Lásd az ágazati kapcsolatok mérlegének e pozitiv szerepéről például Gerő Mária [6] cikkét.

A tanulmányunkban javasolt modell ugyancsak adott végső kibocsátási feladatból indul ki. A kétszimtü tervezési eljárás azonban megkeresi a sokféle alternativ lehetőségek közül azokat a termelési, beruházási, export-import tevékenységeket, amelyek /az adott optimalizálási kritérium szempontjából/ a legelőnyösebbek.

2. Az ágazati kapcsolatok mérlegének modelljében nem szerepelnek korlátozó feltételek. Ezzel szemben a dolgozatunkban javasolt eljárás, mint a többi programozási módszer általában, adott korlátozó feltételi-rendszeren belül keresi a legkedvezőbb programot.

3. A nálunk alkalmazott ágazati kapcsolati mérleg-modellek statikusak, ezzel szemben a tanulmány 2. fejezetében leirt modell dinamikus. Programozzuk a beruházási tevékenységek összetételét és ütemezését.

Amint arra már rámutattunk: modellünk kétségtelen hátránya az ágazati kapcsolatok mérlegével szemben, hogy - a jelenlegi számitástechnikai adottságok mellett - kénytelen a termékmérleg-rendszert erőteljesebben aggregálni. A népgazdasági ágazati kapcsolati mérlegek közel 100 szektorosak, mig saját dinamikus modellünk 8-10 szektorra, a befejező időpontra vonatkozó modell pedig kb. 35-40 szektorra tagolhatja a népgazdaságot. Ezért a két tervezési eszköz nem pótolja, hanem kiegésziti egymást.

5.2 Programozási javaslatok

Az ágazati kapcsolati mérlegek fogyatékosságai láttán számos szerző inditványozta programozási modellek felhasználását a szocialista népgazdasági tervezésben. /Lásd például a magyar szakirodalomból Simon György- Kondor György [18] cikkét./ Ezek az elgondolások azonban nem számoltak a feladat gyakorlati megoldásának alapvető nehézségével:

Vagy egy erősen aggregált programozási modellt szerkesztünk, s akkor rendkivül leszükül a választás lehetősége. A tul erős egyszerüsitések veszélyeztetik a számitási eredmények használhatóságát. Vagy pedig igen nagy méretü modellt dolgozunk ki, amely mentes ezektől a hibáktól - akkor viszont nem biztositható a feladat numerikus megoldása még nagyteljesitményü elektronikus számológépek felhasználásával sem.

Nézetünk szerint minden olyan munka, amely ezt a sulyos kérdést megkerüli, szükségképpen olyan elgondolásokhoz vezet, amelyek - bármily érdekesek is egyébként - a népgazdasági tervezés gyakorlati céljaira nem használhatók. Ezért állitottuk saját vizsgálatunk középpontjába a tervezés "kétszintü" módszerének kidolgozását.

Érdemes utalni a kérdés nyugati szakirodalmára is. Igy például Ragnar Frisch [5] müvében "pyramidation"-nak nevezi a tervezés felsőbb és alsóbb szintjeinek összekapcsolódását a tervszámitásokban. Rávilágit e kérdés jelentőségére, de ugyanakkor olyan modellt ismertet, amely teljes egészében központilag végzi a számitást. Ez az előttünk ismert legnagyobb országos gazdasági programozási modell, amelyben a változók száma 300 felett van. Ez, noha számitástechnikailag igen nagy feladat, a gyakorlati tervezés szemszögéből még mindig tulságosan erős aggregációt igényel. Összehasonlitásul gondoljunk csak arra, hogy dolgozatunkban a szektorok összességét tekintve dinamikus modell esetén mintegy 4-600, a befejező időpontra vonatkozó modell esetén pedig mintegy 1500-2000 változó szerepelhet. S ez számitástechnikailag megoldható a kis és közepes teljesitményü magyarországi elektronikus számológépek adottságai mellett is.

5.3 A döntés részleges decentralizálásának modelljei

A döntések egy részének decentralizálása, a centralizált és decentralizált elhatározások összekapcsolása - e gondolat felmerült már néhány müben. Részletes modelleket dolgozott ki ezzel kapcsolatban Lengyelországban J. Mycieliski, K. Rey és W. Trzeciakowski. /Lásd a [16] és [20] müveket./ E munkáknak uttörő, kezdeményező szerepük van: tudomásunk szerint ez eddig az egyedüli kisérlet a szocialista országok szakirodalmában, amely gyakorlati javaslatot tesz a népgazdasági tervezés egyes feladatainak megoldására ágazatokra felbontott - a szerzők kifejezésével: "disaggregált" - programozási eljárás alapján. A szerzők egy rövidlejáratu, külkereskedelem-optimalizálási modellt dolgoztak ki.

Az irodalom-jegyzékben emlitett, általunk ismert két munka részletes lengyel nyelvü tanulmányok aránylag rövid angol kivonata. Ezekből nem sikerült a szerzők elgondolásait teljes mértékben áttekinteni. Az általunk ismert anyagokban a szerzők nem adják meg a részletes algoritmust a szétbontott programozási feladat megoldására, inkább csak általános koncepciójukat vázolják. Nem bizonyitják az ismertetésben /bár hihetőnek tün k/, hogy eljárásuk eredményeképen közelednek az optimális programhoz. Az ismertetés azt a benyomást kelti, hogy az eljárás hosszadalmas, mert az ágazatok szukcesszive, egymás után végzik a programozást; nincs eléggé kidolgozva a központ menetközbeni koordináló szerepe, a központ és az ágazatok közötti visszacsatolás. Természetesen lehetséges, hogy mindezeket a problémákat a szerzők a részletesebb lengyel dolgozatban megoldották. Mindenesetre kétségtelen az emlitett lengyel közgazdászok uttörő szerepe a kérdés tervgazdaságbeli felvetésében; kutatásuk iránya nagyon közel jár saját vizsgálódásainkhoz.

Nem a szocialista tervezés gyakorlati igényeinek sugalmazására, de a jelzett problémakörrel analóg feladat G.B. Dantzig és Ph. Wolfe [4] cikkének tárgya. Az általunk leirt modell a lineáris programozási feladat egy részét felbontja a központnak alárendelt "üzemek" számára. Az üzemek programozását a központ koordinálja. Az eljárás véges számu lépésben a központi és az üzemi feltételeket egyaránt teljesitő optimális programhoz vezet. A Dantzig-Wolfe-féle modell - megitélésünk szerint - nem jelenti a szocialista tervgazdaság központi tervezésénél felmerülő probléma kielégitő megoldását. Az általuk alapulvett modell szerkezete ugyanis olyan, hogy - a feltételek, s ezzel együtt a programozási feladat részleges decentralizációja ellenére is - tulságosan nagy, számitástechnikailag megoldhatatlan méretü marad a központi koordináló program. Amennyiben a tanulmányban leirt népgazdasági modelleket Dantzig-Wolfe-módszerrel kivánnánk megoldani, ugy a szektormodellek valamennyi gazdasági tevékenységet reprezentáló változóját a központi program változójaként kellene szerepeltetni. Igy, mint emlitettük, dinamikus modell esetén mintegy 4-600, a befejező időpontra vonatkozó modell esetén mintegy 1500-2000 változót kellene egyetlen központi programozás keretében vizsgálni. Ez jelenlegi számitástechnikai adottságaink mellett megoldhatatlan feladat. Ezért kellett más, a Dantzig-Wolfe-módszertől eltérő megoldást keresnünk.

Érdemes még megemliteni, hogy Dantzig-Wolfe módszerével a központi programozás szabályos lineáris programozási feladat megoldását jelenti.

Ezzel szemben a dolgozatban leirt eljárás alkalmazása esetén a központi programozás igen egyszerü "kézi" módszerekkel /puszta rangsorolásokkal, egyszerü át csoportositásokkal stb./ oldható meg.

5.4 Kantorovics koncepciója és az árnyékárrendszer szerepe

A centralizált és decentralizált döntések összekapcsolásának, a tervezés több szintjének problematikája felmerült Kantorovics [10] müvében is. Kantorovics rávilágit arra, hogy a központi terv javitására felhasználhatók az ágazati lineáris programozásból nyert árnyékárak, azaz felveti a jelen tanulmányban leirt eljárás alapgondolatát. Ezt azonban nem dolgozta ki.

Kantorovics elgondolásában központi szerepet kap az árnyékárak felhasználása. A dolgozatunkban javasolt kétszintü tervezés során is igen fontos az árnyékárak hivatása. Éppen ezért lényeges, hogy rávilágitsunk: milyen alapvető különbség van az árnyékáraknak Kantorovics elgondolásában és a mi modellünkben játszott szerepe között.

Kantorovics szerint a lineáris programozás révén nyert árnyékárakat fel lehet használni a lineáris programozási modellen kivül is. Nála a lineáris programozási modellek azok az "üzemek", amelyek az árnyékárakat "termelik" s utána az ármegállapitó szervek, vagy a gazdasági kalkulációkat végző intézmények rendelkezésére bocsátják.

Ezzel az elgondolással szemben sok komoly ellenérv hozható fel. Valamely árnyékárrendszer nem általános érvényü; csupán az adott modell adott célfüggvényéhez s adott feltételi rendszeréhez tartozó árnyékárakról beszélhetünk. Ezért nem lehet a programozásokból nyert árnyékárakat különösebb probléma nélkül egyszerüen aktuális eladási árakká nyilvánitani. Az sem lehetséges, hogy az egyik modellünkből nyert árnyékárakat minden további nélkül "átültessük" egy másik modellbe. Kantorovics müvében ugyanis találhatunk olyan elgondolásokat, amelyek szerint valamely központi programozás árnyékárai felhasználhatók lennének más részdöntések gazdaságossági számitásaiba is. Például a központi programozásból nyert árnyékkamatláb, hatékonysági együttható közvetlenül felhasználható az alsófoku beruházás-gazdaságossági rész-számitásokhoz és igy tovább.

Ha az árnyékárakat kiemelik a modellből, amelyből kinőtt - s átültetik egy másikba, ott rendszerint idegen test marad; a másik modell nem képes hivatását betölteni ezzel az idegen árnyékárral. Kivétel ez alól csak akkor van, ha az árnyékárakat szolgáltató és az árnyékárakat átvevő, befogadó modell szoros rokonságban van egymással, azaz rokon egymással a feltételi rendszer, a célfüggvény, a modell egész szerkezete.

Lényegében ez a helyzet a mi modellünk esetében. A központi és a szektor-modellek között szoros kapcsolat, rokonság van: a központi modell célfüggvénye csupán a szektor-modellek célfüggvényének összege; a központi modell és a szektor-modellek feltételi rendszere szervesen összefügg, az árnyékárakat ezen a modellen belül használjuk fel. A kétszintü tervezés árnyékárait nem tekintjük abszolut érvényüeknek, hanem tudjuk, hogy ezek a számitás alapjául szolgáló gazdaságpolitikai előirásokból, a célfüggvényben alkalmazott sulyrendszerből, általában a modell jellemzőiből levezetett értékelések. Ezért hivatásuk arra korlátozódik, hogy ezen a modellen belül segitsék elő az ellátási feladatok, az anyagok és a munkaerő kedvező elosztását.*

Még egy fontos jellegzetességet akarunk kiemelni. Javaslatainkban az árnyékárat szolgáltató modellek /szektorok/ és az árnyékárat felhasználó modell /központ/ között a kapcsolat nem egyirányu, hanem kölcsönös, kétirányu. Az árnyékárak információi alapján korrigált központi program visszahat a szektor-programokra, amelyek az árnyékárakat szolgáltatták. Ez igen fontos eltérés azoktól az elgondolásoktól, amelyekben csupán az árnyékárak egyirányba történő átadásáról van szó.

- - - - - - -

* Kantorovics birálói rendszerint elismerik, hogy az árnyékáraknak fontos szerepük lehet a vállalati vagy ágazati döntéseknél. Kantorovics szerintük azzal követ el hibát, hogy az árnyékáraknak szerepet szán a népgazdasági tervezésben. Nézetünk szerint nem ez a hiba Kantorovicsnál ebben az összefüggésben, hanem az, hogy /akár üzemi, akár népgazdasági programozásról legyen is szó/ az árnyékárakat fenntartás nélkül kiemeli a modellből, amely létrehozta őket. Az árnyékáraknak igenis hasznos szerepük lehet nemcsak üzemi, hanem népgazdasági szintü tervezésben is, amennyiben szerepüket megfelelően körülhatárolják.

Nem állitjuk, hogy a kétszintü programozás eredményeképpen keletkezett árnyékárrendszer /például a dinamikus, szektoronként és időszakonként eltérő árnyék-diszkontlábak együttese, stb./ végülis semmilyen célra sem használható a modellen <u>kivül.</u> Lehetséges, hogy az igy nyert árnyékárak támpontul szolgálhatnak más számitásokhoz. Ez azonban csak nagy óvatossággal történhet. Még gondos tanulmányozást s nem utolsó sorban a numerikus számitásokra alapuló tapasztalatokat igényel e kérdés eldöntése. Ezért a felhasználás lehetőségére itt most nem is térünk ki. A hangsuly azonban saját javaslatainkban nem ezen van, hanem azon a törekvésen, hogy az árnyékárak magának a programozásnak a segédeszközeiként funkcionáljanak.

6. A KÉTSZINTÜ TERVEZÉS MATEMATIKAI LEIRÁSA

Ebben a fejezetben ismertetjük a kétszintü tervezés általános modelljét, konkrét /dinamikus népgazdasági tervezési/ modelljét, a javasolt eljárással kapcsolatos matematikai tételeket és azok bizonyitását, valamint a központi programozás algoritmusát. Az ismertetés során, különösen a konkrét modell leirásánál, kénytelenek vagyunk - a leirás folyamatossága kedvéért - egyes, a 2. fejezetben már leirt összefüggéseket megismételni. A modellekben szereplő fogalmak és összefüggések közgazdasági értelmezésére ezen a helyen már nem térünk vissza.

6.1. Az általános modell

A teljes tervezési feladat eredeti alakjában /az összes információk központi ismeretében/ egyetlen nagyméretü lineáris programozási feladatként irható fel:

/6.1/ $$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} \leq \underline{\underline{b}}$$

/6.2/ $$\underline{\underline{x}} \geq \underline{\underline{o}}$$

/6.3/ $$\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{x}} = \max !$$

Itt $\underline{\underline{x}}$ az összes döntési változókból álló oszlopvektor, $\underline{\underline{A}}$ az összes feltételek együtthatóiból álló mátrix, $\underline{\underline{b}}$ a feltételek felső korlátaiból álló oszlopvektor, $\underline{\underline{o}}$ csupa o -ból álló megfelelő méretü oszlopvektor, végül $\underline{\underline{c}}$ a hozamokból összeállitott sorvektor. Feltételezzük, hogy a /6.1/-/6.3/ feladat megoldható. Ez magába foglalja az alábbiakat: 1/ Létezik a /6.1/-/6.2/ feltételeknek megfelelő $\underline{\underline{x}}$ vektor, tehát a "megengedett" programok

/6.4/ $$\mathcal{X} = \left\{ \underline{\underline{x}} : \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} \leq \underline{\underline{b}} \,,\ \underline{\underline{x}} \geq \underline{\underline{o}} \right\}$$

halmaza nem üres és 2/ $\mathcal{X}$ valamely $\underline{\underline{x}}^*$ elemére

/6.5/ $$\max_{\underline{\underline{x}} \in \mathcal{X}} \underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{x}}^* \quad .$$

Következik továbbá feltételezésünkből, hogy a /6.1/-/6.3/ primér feladat duálisa, az "árnyékárak" $\underline{\underline{y}}$ sorvektorára vonatkozó

$$y A \geq c \qquad /6.6/$$

$$y \geq 0 \qquad /6.7/$$

$$y b = \min ! \qquad /6.8/$$

feladat is megoldható, tehát 1./ létezik a /6.6/-/6.7/ feltételeknek megfelelő y árnyékárrendszer, azaz az

$$\mathcal{Y} = \{ y : y A \geq c, \; y \geq 0 \} \qquad /6.9/$$

halmaz nem üres és 2./ $\mathcal{Y}$ egy y^* elemére

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} y b = y^* b \quad , \qquad /6.10/$$

továbbá

$$c x^* = y^* b = C^* . \qquad /6.11/$$

A fenti modellt <u>teljes központi információs</u> modellnek nevezzük. A /6.5/, illetve /6.10/ feltételnek megfelelő x^*, illetve y^* a modell <u>optimális megoldásai</u>, mégpedig x^* <u>optimális program</u>, y^* <u>pedig optimális árnyékárrendszer</u>.+/

Az alábbiakban a fenti teljes központi információs modellt "szektorokra" és "központra" bontjuk szét. Legyen n számu szektor s a fenti modell elemeinek alábbi particionálása:

$$A = [A_1, \dots, A_n] \qquad /6.12/$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1, \dots, c_n] \quad , \qquad /6.13/$$

+/A lineáris programozásokkal kapcsolatos ismert általános tételeket hivatkozás nélkül idézzük a [7] dolgozat alapján. Ha szükséges, megjelöljük az idézett tétel pontos helyét [7] -ben. Egyéb forrásmunkára külön hivatkozunk.

ahol $\underline{\underline{x}}_i$ az i-edik szektor változóiból álló részvektor stb. A jelölésekkel a /6.1/-/6.3/ primer, illetve a /6.6/-/6.8/ duál feladat az alábbi alakot ölti:

/6.14/ $$\underline{\underline{A}}_1\underline{\underline{x}}_1 + \dots + \underline{\underline{A}}_n\underline{\underline{x}}_n \leq \underline{\underline{b}}$$

/6.15/ $$\underline{\underline{x}}_1 \geq \underline{\underline{o}}, \dots, \underline{\underline{x}}_n \geq \underline{\underline{o}}$$

/6.16/ $$\underline{\underline{c}}_1\underline{\underline{x}}_1 + \dots + \underline{\underline{c}}_n\underline{\underline{x}}_n = \min!$$

illetve

/6.17/ $$\begin{cases} \underline{\underline{y}}\,\underline{\underline{A}}_1 \geq \underline{\underline{c}}_1 \\ \quad\ddots \\ \underline{\underline{y}}\,\underline{\underline{A}}_n \geq \underline{\underline{c}}_n \end{cases}$$

/6.18/ $$\underline{\underline{y}} \geq \underline{\underline{o}}$$

/6.19/ $$\underline{\underline{y}}\underline{\underline{b}} = \min!$$

Vezessünk be egy

/6.20/ $$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{u}}_n \end{bmatrix}$$

vektorparamétert, amelynek $\underline{\underline{u}}_1, \dots, \underline{\underline{u}}_n$ részvektorai $\underline{\underline{b}}$-vel egyenlő méretü oszlopvektorok. Nevezzük $\underline{\underline{u}}$-t központi programnak, s a megengedett központi programok $\mathcal{U}$ halmazát értelmezzük az alábbi relációkkal:

/6.21/ $$\underline{\underline{u}}_1 + \dots + \underline{\underline{u}}_n = \underline{\underline{b}}$$

/6.22/ $$\underline{\underline{D}}\underline{\underline{u}} \leq \underline{\underline{d}} \quad .$$

A /6.21/ feltétel azt jelenti, hogy az $\underline{\underline{u}}$ központi program a /6.14/-beli $\underline{\underline{b}}$ korlátot "felosztja" az egyes szektorok között, a /6.22/ feltétel a /6.22/-ben szereplő $\underline{\underline{D}}$ mátrix és a $\underline{\underline{d}}$ vektor megválasztásától függően korlátozza az összes lehetséges felosztások körét.

Minden $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ felosztás a teljes információs modell egy felbontását létesiti szektorokon belüli részprogramozásokra az alábbi módon:

$$/6.23/ \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \underline{\underline{A}}_i \underline{\underline{x}}_i \leq \underline{\underline{u}}_i & & \underline{\underline{y}}_i \underline{\underline{A}}_i \geq \underline{\underline{c}}_i \\ \underline{\underline{x}}_i \geq \underline{\underline{o}} & \text{illetve} & \underline{\underline{y}}_i \geq \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{c}}_i \underline{\underline{x}}_i = \max! & & \underline{\underline{y}}_i \underline{\underline{u}}_i = \min! \end{array} \right\} \quad i = 1, \ldots, n .$$

E szektorfeladatok mindenesetre abban a kapcsolatban vannak a teljes központi információs modellel, hogy ha egy $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ központi program esetén a /6.23/ feladatok mind megoldhatók, tehát az

$$/6.24/ \quad \mathfrak{X}_i(\underline{\underline{u}}) = \{ \underline{\underline{x}}_i : \underline{\underline{A}}_i \underline{\underline{x}}_i \leq \underline{\underline{u}}_i \, \underline{\underline{x}}_i \geq \underline{\underline{o}} \} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$/6.25/ \quad \mathcal{Y}_i = \{ \underline{\underline{y}}_i : \underline{\underline{y}}_i \underline{\underline{A}}_i \geq \underline{\underline{c}}_i \, \underline{\underline{y}}_i \geq \underline{\underline{o}} \}$$

halmazok nem üresek, akkor a /6.24/-beli megengedett halmazokból összeállitható $\underline{\underline{x}}$ programok megengedettek lesznek a teljes központi információs feladatban, tehát

$$/6.26/ \quad \mathfrak{X}(\underline{\underline{u}}) = \mathfrak{X}_1(\underline{\underline{u}}) \times \cdots \times \mathfrak{X}_n(\underline{\underline{u}}) = \left\{ \underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{x}}_n \end{bmatrix} : \underline{\underline{x}}_i \in \mathfrak{X}_i(\underline{\underline{u}}), \; i = 1, \ldots, n \right\} \subset \mathfrak{X}$$

áll fenn. Ez abból következik, hogy $\underline{\underline{x}}_i \in \mathfrak{X}_i(\underline{\underline{u}})$ esetén $\underline{\underline{A}}_i x_i \leq \underline{\underline{u}}_i$ és $\underline{\underline{x}}_i \geq \underline{\underline{o}}$, tehát $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{x}}_1 + \cdots + \underline{\underline{A}}_n \underline{\underline{x}}_n \leq \underline{\underline{u}}_1 + \cdots + \underline{\underline{u}}_n = \underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{x}} \geq \underline{\underline{o}}$. Ha e megoldhatósági feltételt biztosithatnánk, továbbá olyan felosztást alkalmaznánk, amelynél minden $\underline{\underline{x}} \in \mathfrak{X}$ eleme lenne valamelyik $\mathfrak{X}(\underline{\underline{u}})$-nak, az eredeti feladatot két fokozatban lehetne megoldani: meghatározni minden $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ központi programhoz a /6.23/ szektorfeladatok optimális megoldásait, majd meghatározni azt a megengedett központi programot, amelynél a részoptimumok összege maximális.

A fentiek végrehajtására értelmezzük a <u>reguláris felbontás</u> fogalmát. A /6.12/-/6.13/ particionálásokkal és a központi programra vonatkozó /6.21/-/6.22/ feltételekkel meghatározott felbontást regulárisnak nevezzük, ha teljesül az alábbi három feltétel:

I. A $\underline{\underline{D}}$ mátrix és a $\underline{\underline{d}}$ vektor olyan természetüek, hogy a megengedett központi programok $\mathcal{U}$ halmaza nem üres, korlátos konvex poliéder.

II. Tetszőleges megengedett központi program mellett a /6.23/ alatti szektorfeladatok megoldhatók, tehát a /6.24/-/6.25/ alatti halmazokra+/

/6.27/ $$\mathcal{X}_i(\underline{\underline{u}}) \neq \emptyset\,, \quad \mathcal{Y}_i \neq \emptyset \qquad i = 1,\dots,n\,; \qquad \underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}\,.$$

III. Valamilyen központi programmal minden teljes központi információs megengedett program előállitható, tehát /6.26/ mellett

/6.28/ $$\bigcup_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \mathcal{X}(\underline{\underline{u}}) = \mathcal{X}\,.$$

Megjegyezzük, hogy a /6.25/ halmazokkal mindenesetre érvényes az

/6.29/ $$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cap \dots \cap \mathcal{Y}_n$$

előállitás.

Nevezzünk <u>optimálisnak</u> egy $\underline{\underline{u}}^* \in \mathcal{U}$ központi programot, ha az $\underline{\underline{u}}^*$ felosztás mellett a szektoroptimumok összege maximális. Más szóval: ha $\varphi_i(\underline{\underline{u}})$ jelenti az $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ központi program szerinti i -edik szektoroptimumot:

/6.30/ $$\varphi_i(\underline{\underline{u}}) = \max_{\underline{\underline{x}}_i \in \mathcal{X}_i(\underline{\underline{u}})} \underline{\underline{c}}_i \underline{\underline{x}}_i = \min_{\underline{\underline{y}}_i \in \mathcal{Y}_i} \underline{\underline{y}}_i \underline{\underline{u}}_i$$

és $\varphi(\underline{\underline{u}})$ ezek összege:

/6.31/ $$\varphi(\underline{\underline{u}}) = \varphi_1(\underline{\underline{u}}) + \dots + \varphi_n(\underline{\underline{u}})\,,$$

akkor $\underline{\underline{u}}^* \in \mathcal{U}$ optimális központi program, ha

/6.32/ $$\varphi(\underline{\underline{u}}^*) = \max_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \varphi(\underline{\underline{u}})\,.$$

+/ $\emptyset$ az üres halmazt jelöli.

Vezessük még be az $\underline{\underline{x}}_i^*(\underline{\underline{u}})$, illetve $\underline{\underline{y}}_i^*(\underline{\underline{u}})$ jelölést az i -edik szektor egy optimális programjára, illetve optimális árnyékárrendszerére az $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ központi program mellett, tehát $\underline{\underline{x}}_i^*(\underline{\underline{u}}) \in \mathcal{X}_i(\underline{\underline{u}})$, illetve $\underline{\underline{y}}_i^*(\underline{\underline{u}}) \in \mathcal{Y}_i$ olyan elemek, amelyekre

$$/6.33/ \qquad \underline{\underline{c}}_i \underline{\underline{x}}_i^*(\underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{y}}_i^*(\underline{\underline{u}})\underline{\underline{u}}_i = \varphi_i(\underline{\underline{u}}) \qquad i = 1, \dots, n \, .$$

Kimondhatjuk most az alábbi tételt:

1. TÉTEL: Reguláris felbontás esetén

a/ Van $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi program, és a hozzátartozó $\underline{\underline{x}}_i^*(\underline{\underline{u}}^*)$ optimális szektorprogramokból összeállitott

$$/6.34/ \qquad \underline{\underline{x}}^*(\underline{\underline{u}}^*) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_1^*(\underline{\underline{u}}^*) \\ \\ \underline{\underline{x}}_n^*(\underline{\underline{u}}^*) \end{bmatrix}$$

program optimális a teljes központi információs modellben; ezenfelül a teljes központi információs modell minden optimális programja valamilyen $\underline{\underline{u}}^* \in \mathcal{U}$ optimális központi programmal a /6.34/ alakban állitható elő.

b/ Bármely $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi program melletti optimális szektorbeli árnyékárrendszerek közül kiválaszthatók olyan $\underline{\underline{y}}_1^*(\underline{\underline{u}}^*), \dots, \underline{\underline{y}}_n^*(\underline{\underline{u}}^*)$ elemek, amelyek egyenlők és közös értékük optimális árnyékárrendszer a teljes központi információs modellben:

$$/6.35/ \qquad \underline{\underline{y}}_1^*(\underline{\underline{u}}^*) = \dots = \underline{\underline{y}}_n^*(\underline{\underline{u}}^*) = \underline{\underline{y}}^* \in \mathcal{Y} \; ;$$

ezenfelül a teljes központi információs modell bármely $\underline{\underline{y}}^*$ optimális árnyékárrendszere tetszőleges $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi program mellett a /6.35/ alakban állitható elő.

c/ Ha egy $\hat{\underline{\underline{u}}} \in \mathcal{U}$ központi program melletti optimális szektorárnyékárrendszerek "egalizálhatók": kiválasztható közülük egy minden szektorban közös $\hat{\underline{\underline{y}}}$ árnyékárrendszer:

$$/6.36/ \qquad \underline{\underline{y}}_1^*(\hat{\underline{\underline{u}}}) = \dots = \underline{\underline{y}}_n^*(\hat{\underline{\underline{u}}}) = \hat{\underline{\underline{y}}} \; ,$$

akkor $\hat{\underline{\underline{u}}}$ optimális központi program, $\hat{\underline{\underline{y}}}$ optimális árnyékárrendszer a teljes központi információs modellben.

BIZONYITÁS.

a/ $\varphi(\underline{\underline{u}})$ az $\mathcal{U}$ halmazon értelmezett konkáv függvény. Ugyanis bevezetve a

$$\mathcal{V} = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_n = \{ \underline{\underline{v}} = [\underline{\underline{y}}_1, \dots, \underline{\underline{y}}_n] : \underline{\underline{y}}_i \in \mathcal{Y}_i \ , \ i = 1, \dots, n \} \tag{6.37}$$

jelölést, /6.30/-/6.31/ alapján

$$\varphi(\underline{\underline{u}}) = \min_{\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} \ , \tag{6.38}$$

tehát tetszőleges $\underline{\underline{u}}_i \in \mathcal{U}$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$ $(i = 1,2)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ mellett

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 \underline{\underline{u}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{u}}_2) &= \min_{\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}} \underline{\underline{v}}(\lambda_1 \underline{\underline{u}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{u}}_2) \geq \\ &\geq \lambda_1 \min_{\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}_1 + \lambda_2 \min_{\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}_2 = \lambda_1 \varphi(\underline{\underline{u}}_1) + \lambda_2 \varphi(\underline{\underline{u}}_2) . \end{aligned} \tag{6.39}$$

Ezenfelül $\varphi(\underline{\underline{u}})$ az $\mathcal{U}$ halmazon folytonos is. Ez abból következik, hogy ha a $\mathcal{V}$ halmazon $\underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}$ minimuma létezik /tehát $\inf \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} > -\infty$ /, akkor $\underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}$ csak $\mathcal{V}$ egy extrém pontján veheti fel ezt az értéket. Ha tehát $\underline{\underline{v}}_1, \dots, \underline{\underline{v}}_N$ jelentik $\mathcal{V}$ extrém pontjait, akkor

$$\varphi(\underline{\underline{u}}) = \min(\underline{\underline{v}}_1 \underline{\underline{u}}, \dots, \underline{\underline{v}}_N \underline{\underline{u}}) \ ,$$

s ezért $\varphi(\underline{\underline{u}})$ folytonos.

Igy a folytonos $\varphi(\underline{\underline{u}})$ függvény a korlátos és zárt $\mathcal{U}$ halmaz legalább egy $\underline{\underline{u}}^*$ pontjában felveszi maximumát.

/6.34/ igazolására csak azt kell meggondolnunk, hogy /6.28/ miatt

$$\begin{aligned} C^* = \max_{\underline{\underline{x}} \in \mathcal{X}} cx &= \max_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \ \max_{\underline{\underline{x}} \in \mathcal{X}(\underline{\underline{u}})} \underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{x}} = \max_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \ \max_{\substack{\underline{\underline{x}}_i \in \mathcal{X}_i(\underline{\underline{u}}) \\ i = 1,\dots,n}} \sum \underline{\underline{c}}_i \underline{\underline{x}}_i = \\ &= \max_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \varphi(\underline{\underline{u}}) . \end{aligned} \tag{6.40}$$

A teljes központi információs modell $\underline{\underline{x}}^*$ optimális programjai és az $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi programok között /6.40/ egyértelmü kapcsolatot létesit, melyet éppen a /6.34/ fejez ki.

b/ Mivel a teljes központi információs modell megoldható, elegendő, ha kimutatjuk, hogy tetszőleges $\underline{\underline{y}}^*$ optimális árnyékárrendszer egyben optimális szektorárnyékárrendszer is bármely $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi program mellett. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát valamilyen i_0 indexü szektorra és $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi programra

/6.41/ $$\underline{\underline{y}}^* \underline{\underline{u}}^*_{i_0} > \varphi_{i_0}(\underline{\underline{u}}^*) = \underline{\underline{y}}^*_{i_0}(\underline{\underline{u}}^*)\, \underline{\underline{u}}^*_{i_0} .$$

Ebből

/6.42/ $$C^* = \underline{\underline{y}}^* \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{y}}^* \underline{\underline{u}}^*_i > \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\underline{\underline{u}}^*) = \varphi(\underline{\underline{u}}^*) = C^* ,$$

ami lehetetlen.

c/ A /6.36/ relációból és /6.29/-ből következik, hogy

/6.43/ $$\hat{\underline{\underline{y}}} \in \mathcal{Y} .$$

Továbbá abból, hogy $\hat{\underline{\underline{u}}}$ központi program mellett $\hat{\underline{\underline{y}}}$ mindegyik szektorban optimális árnyékárrendszer, következik, hogy tetszőleges $\underline{\underline{y}} \in \mathcal{Y}$ esetén

/6.44/ $$\hat{\underline{\underline{y}}} \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\underline{\underline{y}}} \hat{\underline{\underline{u}}}_i \leq \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{y}} \hat{\underline{\underline{u}}}_i = \underline{\underline{y}} \underline{\underline{b}}$$

tehát $\hat{\underline{\underline{y}}}$ optimális árnyékárrendszer a teljes központi információs modellben. $\hat{\underline{\underline{u}}}$ optimális volta ekkor a

/6.45/ $$C^* = \hat{\underline{\underline{y}}} \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\hat{\underline{\underline{u}}}) = \varphi(\hat{\underline{\underline{u}}})$$

egyenlőségből olvasható le /vö. /6.40/ -nel!/.

6.2. A feladat játékelméleti interpretációja

Mint láttuk, az eredeti feladat a következő konkáv programozási feladattá alakitható: meghatározandó a konkáv $\varphi(\underline{\underline{u}})$ függvény maximuma az $\mathcal{U}$ konvex poliéderen. Ezt a feladatot ugy is interpretálhatjuk: meghatározandó a

/6.46/ $$K(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{v}}) = \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} \qquad \underline{\underline{u}}\in\mathcal{U}\ ,\ \underline{\underline{v}}\in\mathcal{V}$$

függvény maximin értéke, tehát a

/6.47/ $$C^* = \max_{\underline{\underline{u}}\in\mathcal{U}}\ \min_{\underline{\underline{v}}\in\mathcal{V}}\ \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}$$

érték, továbbá a megfelelő $\underline{\underline{u}}^*$, $\underline{\underline{v}}^*$ elemek. $\underline{\underline{u}}^*$ meghatározása után például az $\underline{\underline{u}}^*$ melletti /6.23/ primer feladatok megoldása és /6.34/ alkalmazása utján az eredeti feladat megoldása könnyen nyerhető.

E feladat a következő kétszemélyes, zérusösszegü, normalizált alaku játék+/ megoldásával /minimax stratégiáinak meghatározásával/ egyenértékü: az első fél /a "központ"/ $\mathcal{U}$ -ból választ egy $\underline{\underline{u}}$ elemet, a második fél /a "szektorok"/ $\mathcal{V}$ -ből választ egy $\underline{\underline{v}}$ elemet; e választások egymástól függetlenül és a másik választás ismerete nélkül való végrehajtása után a második fél $K(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{v}}) = \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}$ értéket fizet az elsőnek. $\mathcal{U}$ is, $\mathcal{V}$ is konvex poliéderek, $K(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{v}})$ változóinak homogén bilineáris függvénye: e játékokat Ph. Wolfe [21] után <u>poliéderjátékoknak</u> nevezzük.++/ Az alábbiakban bebizonyitjuk, hogy a 6.1.-ben tett feltételezések /a teljes központi információs feladat megoldhatósága és a felbontás reguláris volta/ mellett e poliéderjáték megoldható.

Bocsássuk előre a következőket: a korlátos, konvex $\mathcal{U}$ poliéder extrém pontjainak konvex burka, tehát ilyen alaku:

/6.48/ $$\mathcal{U} = \left\{ \sum_{i=1}^{M} p_i \underline{\underline{u}}^i \ :\ p_1+\cdots+p_M = 1\ ,\ p_i \geq 0 \right\} .$$

Itt $\underline{\underline{u}}^1, \ldots, \underline{\underline{u}}^M$ az $\mathcal{U}$ extrém pontjai. A - nem szükségképpen

---

+/ A játékelméleti fogalmakra és tételekre vonatkozóan általában [9] első kötetére utalunk. Ha szükséges, a megfelelő helyeket külön feltüntetjük.

++/ Megjegyezzük, hogy e játékok kevert kiterjesztése /lásd [1] , 26.oldal, Definition 1.8.2/ izomorf az eredeti játékkal.

korlátos - $\mathcal{V}$ konvex poliéder extrém pontjai konvex burkának és extrém irányaival kifeszitett konvex gulának vektoriális összege, tehát ilyen alaku:

/6.49/ $$\mathcal{V} = \left\{ \sum_{j=1}^{N} q_j \underline{\underline{v}}_j + \mu \sum_{k=1}^{N^o} q_k^o \underline{\underline{v}}_k^o : q_1 + \dots + q_N = q_1^o + \dots + q_N^o = 1,\ q_j \geq 0, q_k^o \geq 0, \mu \geq 0 \right\} .$$

Itt $\underline{\underline{v}}_1, \dots \underline{\underline{v}}_N$ a $\mathcal{V}$ extrém pontjai, $\underline{\underline{v}}_1^o, \dots, \underline{\underline{v}}_N^o$ pedig $\mathcal{V}$ extrém irányai +/. Kezelhetőbbé válik e poliéderek előállitása az

/6.50/ $$\underline{\underline{U}} = [\underline{\underline{u}}^1, \dots, \underline{\underline{u}}^M] , \quad \underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{v}}_N \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{V}}^o = \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1^o \\ \\ \underline{\underline{v}}_{N^o}^o \end{bmatrix}$$

mátrixok, valamint az M - méretü, illetve N és N^o méretü "valószinüségi" oszlop-, illetve sorvektorokból álló

/6.51/ $$\mathcal{P} = \left\{ \underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix} : p_1 + \dots + p_M = 1 ,\ p_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \right\}$$

/6.52/ $$\mathcal{Q} = \{ \underline{\underline{q}} = [q_1, \dots, q_N] : q_1 + \dots + q_N = 1,\ q_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \}$$

/6.53/ $$\mathcal{Q}^o = \{ \underline{\underline{q}}^o = [q_1^o, \dots, q_{N^o}^o] : q_1^o + \dots + q_{N^o}^o = 1,\ q_k^o \geq 0 \quad k = 1, \dots, N^o \}$$

halmazok bevezetésével. Ekkor ugyanis

+/ Lásd pl. a [8] dolgozatot. Ha a $\mathcal{V}$ -t definiáló

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}}\underline{\underline{H}} &\geq \underline{\underline{h}} \\ \underline{\underline{v}} &\geq \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszerben ($\underline{\underline{H}} = \langle \underline{\underline{A}}_1, \dots, \underline{\underline{A}}_n \rangle$, $\underline{\underline{h}} = [\underline{\underline{c}}_1, \dots, \underline{\underline{c}}_n]$) $\underline{\underline{h}}$ helyett $\underline{\underline{0}}$ -t irunk, s a kapott homogén rendszernek csak a $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}}$ triviális megoldása van, akkor $\mathcal{V}$ korlátos, és $N^o = 1$, $\underline{\underline{v}}_1^o = \underline{\underline{0}}$. Ha más megoldás is van, $v_1^o, \dots, v_{N^o}^o$ a

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}}\underline{\underline{H}} &\geq \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{v}}\underline{\underline{1}} &= 1 \\ \underline{\underline{v}} &\geq \underline{\underline{0}} \end{aligned} \qquad \underline{\underline{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

egyenlőtlenségrendszerrel meghatározott és <u>korlátos</u> konvex poliéder extrém pontjait jelentik.

/6.54/ $$\mathcal{U} = \underline{\underline{U}}^{\Delta} = \{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{p}} : \underline{\underline{p}} \in \mathcal{P}\}$$

/6.55/ $$\mathcal{V} = \underline{\underline{V}}^{\Delta} \oplus \underline{\underline{V}}^{\circ<} = \{\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{V}} + \mu \underline{\underline{q}}^{\circ}\underline{\underline{V}}^{\circ} : \underline{\underline{q}} \in \mathcal{Q},\ \underline{\underline{q}}^{\circ} \in \mathcal{Q}^{\circ},\ \mu \geq 0\} .$$

Most rátérünk az alábbi tételre:

2. TÉTEL. a/ A mondott feltételek mellett a fenti $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, K)$ poliéderjáték megoldható, és megoldása redukálható annak a $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \underline{\underline{R}})$ mátrixjátéknak a megoldására, amelynek $\underline{\underline{R}}$ kifizetési mátrixa:

/6.56/ $$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1 \underline{\underline{u}}^1 & \cdots & \underline{\underline{v}}_N \underline{\underline{u}}^1 \\ & & \\ \underline{\underline{v}}_1 \underline{\underline{u}}^M & \cdots & \underline{\underline{v}}_N \underline{\underline{u}}^M \end{bmatrix} ,$$

stratégiahalmazai pedig ennek megfelelően a /6.51/ alatti $\mathcal{P}$, illetve a /6.52/ alatti $\mathcal{Q}$ halmazok.

b/ A $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \underline{\underline{R}})$ mátrixjátékban a második félnek van olyan $\underline{\underline{q}}^* = [q_1^*, \dots, q_N^*] \in \mathcal{Q}$ minimax stratégiája, amelynek az $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, K)$ poliéderjátékban megfelelő

/6.57/ $$\underline{\underline{v}}^* = \sum_{j=1}^{N} q_j^* \underline{\underline{v}}_j = [\underline{\underline{y}}_1^*, \dots, \underline{\underline{y}}_n^*] \in \mathcal{V}$$

stratégiára

/6.58/ $$\underline{\underline{y}}_1^* = \cdots = \underline{\underline{y}}_n^* = \underline{\underline{y}}^* ,$$

és $\underline{\underline{y}}^*$ optimális árnyékárrendszer a teljes központi információs modellben. Forditva: ha egy $\mathcal{Q}$ -beli $\underline{\underline{q}}^*$ stratégiára érvényes egy /6.58/ alaku "egalizálódás", akkor $\underline{\underline{y}}^*$ optimális árnyékárrendszer és $\underline{\underline{q}}^*$ minimax stratégia $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \underline{\underline{R}})$ -ben.

BIZONYITÁS. A /6.54/-/6.55/ alatti előállitások miatt $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, K)$ izomorf a $(\mathcal{P}\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{\circ}, I\}, L)$ játékkal, amelynek stratégiahalmazai $\mathcal{P}$, illetőleg a $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{\circ}, I = \{\mu : \mu \geq 0\}$ hármas, kifizetési függvénye pedig

/6.59/ $L(\underline{\underline{p}};\underline{\underline{q}},\underline{\underline{q}}^{\circ},\mu) = \underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{p}} + \mu\,\underline{\underline{q}}^{\circ}\underline{\underline{R}}^{\circ}\underline{\underline{p}} \qquad \underline{\underline{p}}\in\mathcal{P},\ \underline{\underline{q}}\in\mathcal{Q},\ \underline{\underline{q}}^{\circ}\in\mathcal{Q}^{\circ},\ \mu\in I,$

ahol $\underline{\underline{R}}$ a /6.56/ alatt értelmezett mátrix, és

/6.60/ $$\underline{\underline{R}}^{\circ} = \underline{\underline{V}}^{\circ}\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1^{\circ}\underline{\underline{u}}^{1} & \cdots & \underline{\underline{v}}_{N^{\circ}}^{\circ}\underline{\underline{u}}^{1} \\ \\ \underline{\underline{v}}_1^{\circ}\underline{\underline{u}}^{M} & \cdots & \underline{\underline{v}}_{N^{\circ}}^{\circ}\underline{\underline{u}}^{M} \end{bmatrix}.$$

/Az izomorfiában az $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{P}$, illetőleg $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{Q},\mathcal{Q}^{\circ}, I$ leképezés esetleges többértelmüségétől eltekintünk./ Ennek tisztázása után térünk rá a tulajdonképpeni bizonyitásra.

a/ A felbontás regularitásából, tehát a szektorprogramozások minden $\underline{\underline{u}}\in\mathcal{U}$ melletti megoldhatóságából következik, hogy a /6.60/ alatti mátrixra:

/6.61/ $$\underline{\underline{R}}^{\circ} \geq \underline{\underline{O}}\,.$$

A szektoronkénti megoldhatóságból ugyanis $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{p}}$ esetén

/6.62/ $$-\infty < \varphi_i(\underline{\underline{u}}) = \inf_{\underline{\underline{v}}\in\mathcal{V}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} = \inf_{\underline{\underline{q}}\in\mathcal{Q},\,\underline{\underline{q}}^{\circ}\in\mathcal{Q}^{\circ},\,\mu\geq 0} (\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{p}} + \mu\,\underline{\underline{R}}^{\circ}\underline{\underline{p}}) =$$
$$= \min_{\underline{\underline{q}}\in\mathcal{Q}} \underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{p}} + \inf_{\mu\geq 0} \mu \left\{ \min_{\underline{\underline{q}}^{\circ}\in\mathcal{Q}^{\circ}} \underline{\underline{q}}^{\circ}\underline{\underline{R}}^{\circ}\underline{\underline{p}} \right\}.$$

A fenti második tag csak akkor lehet véges minden $\underline{\underline{p}}\in\mathcal{P}$ esetén, ha

/6.63/ $$\min_{\underline{\underline{q}}^{\circ}\in\mathcal{Q}^{\circ}} \underline{\underline{q}}^{\circ}\underline{\underline{V}}^{\circ}\underline{\underline{u}}^{i} = \min(\underline{\underline{v}}_1^{\circ}\underline{\underline{u}}^{i},\ldots,\underline{\underline{v}}_{N^{\circ}}^{\circ}\underline{\underline{u}}^{i}) \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,M$$

tehát /6.61/ valóban teljesül.

Ha viszont /6.61/ teljesül és $\underline{\underline{p}}^{*}\in\mathcal{P}$, $\underline{\underline{q}}^{*}\in\mathcal{Q}$ minimax stratégiák a $(\mathcal{P},\mathcal{Q},\underline{\underline{R}})$ mátrixjátékban+/, azaz

+/ Neumann alaptétele szerint ilyenek mindig léteznek.

/6.64/ $\qquad \underline{\underline{q}}^* \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{p}} \leq \underline{\underline{q}}^* R\, \underline{\underline{p}}^* \leq \underline{\underline{q}}\, \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{p}}^* \qquad$ ha $\quad \underline{\underline{p}} \in \mathcal{P}, \ \underline{\underline{q}} \in Q,$

akkor tetszőleges $\underline{\underline{q}}^{\circ *} \in Q^{\circ}$ esetén $\underline{\underline{p}}^* \in \mathcal{P}$, $(\underline{\underline{q}}^*, \underline{\underline{q}}^{\circ *}, 0) \in \{Q, Q^{\circ}, I\}$ minimax stratégiák az $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, K)$ -val izomorf $(\mathcal{P}, \{Q, Q^{\circ}, I\}, L)$ játékban. Ugyanis

/6.65/ $\qquad L(\underline{\underline{p}}^*; \underline{\underline{q}}^*, \underline{\underline{q}}^{\circ *}, 0) = \underline{\underline{q}}^* \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{p}}^*$

/6.66/ $\qquad L(p^*; \underline{\underline{q}}, \underline{\underline{q}}^{\circ}, \mu) = \underline{\underline{q}}\, \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{p}}^* + \mu\, \underline{\underline{q}}^{\circ} \underline{\underline{R}}^{\circ} \underline{\underline{p}}^*$

/6.67/ $\qquad L(\underline{\underline{p}}; \underline{\underline{q}}^*, \underline{\underline{q}}^{\circ *}, 0) = \underline{\underline{q}}^* \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{p}}$

tehát /6.64/, illetve /6.61/ alapján tetszőleges $\underline{\underline{p}} \in \mathcal{P}$, $\underline{\underline{q}} \in Q$, $\underline{\underline{q}}^{\circ} \in Q^{\circ}$, $\mu \in I$ mellett

/6.68/ $\qquad L(\underline{\underline{p}}; \underline{\underline{q}}^*, \underline{\underline{q}}^{\circ *}, 0) \leq L(\underline{\underline{p}}^*; \underline{\underline{q}}^*, \underline{\underline{q}}^{\circ *}, 0) \leq L(\underline{\underline{p}}^*; \underline{\underline{q}}, \underline{\underline{q}}^{\circ}, \mu).$

b/ A tétel e része egyszerü átfogalmazása az 1. tétel b/–c/ pontjainak.

A feladat tehát a $(\mathcal{P}, Q, \underline{\underline{R}})$ mátrixjáték megoldására redukálódott. A közvetlen megoldáshoz $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ összes extrém pontjainak meghatározása és ebből az $\underline{\underline{R}}$ mátrixnak a /6.50/ alatti képlettel való kiszámitása volna szükséges. E helyett a "fiktiv lejátszás" módszeréhez folyamodunk. /Ismertetését és a vele kapcsolatos bizonyitásokat a [9] könyvben, a 179-189. oldalakon lehet megtalálni./

6.3. Megoldás fiktiv lejátszással

G.W. Brown vetette fel tetszőleges játék megoldására az alábbi ötletet [2] , [3] : változtassuk meg az eredeti játékszabályt és a stratégiák egymástól független választása helyett válasszanak a játékosok egy-egy stratégiát egymás után <u>felváltva</u>, mégpedig ugy, hogy kiindulva az egyik fél egy tetszőleges stratégiájából, minden választásnál az ellenfél eddig használt stratégiáinak egyenlő sulyokkal vett keverékével mint kevert stratégiával szemben optimalizáljanak. Ezáltal kialakul a választott stratégiáknak, továbbá a keverék-stratégiáknak egy-egy sorozata mindkét játékosnál. Brown, majd teljes exaktsággal Julia Robinson [17] kimutatták, hogy ez utóbbi stratégia-sorozatok mátrix-játék esetén a játék optimális strategiái felé konvergálnak.

Visszatérve az $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, K)$ poliéder-játékra, definiáljuk /az eddigi jelölések értelemszerü kiterjesztésével/ a tetszőleges $\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}$ stratégiával szemben optimális $\underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}}) \in \mathcal{U}$ és a tetszőleges $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ stratégiával szemben optimális $\underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}}) \in \mathcal{V}$ stratégiákat az alábbiakkal:

$$/6.69/ \qquad \begin{cases} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}}) = \max\limits_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} \\[2ex] \underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}})\,\underline{\underline{u}} = \min\limits_{\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} \,. \end{cases}$$

A korábbiakból következik, hogy a /6.1/-beli feltételek mellett ilyen stratégiák mindig léteznek. Az $\underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}})$, illetve $\underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}})$ vektorokat adott $\underline{\underline{v}}$, illetve $\underline{\underline{u}}$ esetén lineáris programozással lehet meghatározni.

A fenti jelöléssel egy $\hat{\underline{\underline{u}}}, \hat{\underline{\underline{v}}}$ pár megoldása a poliéder-játéknak, ha

$$/6.70/ \qquad \hat{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{u}}^*(\hat{\underline{\underline{v}}}) \quad \text{és} \quad \hat{\underline{\underline{v}}} = \underline{\underline{v}}^*(\hat{\underline{\underline{u}}}) \,.$$

A fiktiv lejátszásban kiindulunk egy tetszőleges $\underline{\underline{u}}^{(1)} \in \mathcal{U}$ elemből. Meghatározzuk a vele szemben optimális $\underline{\underline{v}}^{(1)} = \underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}}^{(1)})$ elemet, majd bevezetjük a kevert stratégiák első elemeit. Definiciószerüen:

$$/6.71/ \qquad \underline{\underline{u}}^*\{1\} = \underline{\underline{u}}^{(1)} \qquad \underline{\underline{v}}^*\{1\} = \underline{\underline{v}}^{(1)} \,.$$

Ezután áttérünk az iteráció második szakaszára. Kiszámitjuk a $\underline{\underline{v}}^*\{1\}$ -gyel szemben optimális

$$/6.72/ \qquad \underline{\underline{u}}^{(2)} = \underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}}^*\{1\})$$

elemet, ebből az

/6.73/ $$\underline{\underline{u}}^*\{2\} = \frac{1}{2}\underline{\underline{u}}^{(1)} + \frac{1}{2}\underline{\underline{u}}^{(2)} = \frac{1}{2}\underline{\underline{u}}^*\{1\} + \frac{1}{2}\underline{\underline{u}}^{(2)}$$

kevert stratégiát és a vele szemben optimális

/6.74/ $$\underline{\underline{v}}^{(2)} = \underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}}^*\{2\})$$

elemet, ebből pedig a

/6.75/ $$\underline{\underline{v}}^*\{2\} = \frac{1}{2}\underline{\underline{v}}^{(1)} + \frac{1}{2}\underline{\underline{v}}^{(2)} = \frac{1}{2}\underline{\underline{v}}^*\{1\} + \frac{1}{2}\underline{\underline{v}}^{(2)}$$

kevert stratégiát. Ezután rátérünk az iteráció harmadik szakaszára, és igy tovább. Általában, ha már kiszámitottuk az $\underline{\underline{u}}^*\{1\}, \underline{\underline{u}}^*\{2\}, \ldots$ $\ldots, \underline{\underline{u}}^*\{N-1\}$ és $\underline{\underline{v}}^*\{1\}, \underline{\underline{v}}^*\{2\}, \ldots, \underline{\underline{v}}^*\{N-1\}$ elemeket, az iteráció következő, N -edik szakasza négy lépésből áll:

I. A $\underline{\underline{v}}^*\{N-1\}$ -gyel szemben optimális

/6.76/ $$\underline{\underline{u}}^{(N)} = \underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}}^*\{N-1\})$$

elem meghatározása /lineáris programozással/.

II. Az

/6.77/ $$\underline{\underline{u}}^*\{N\} = \frac{1}{N}\underline{\underline{u}}^{(1)} + \ldots + \frac{1}{N}\underline{\underline{u}}^{(N)} = \frac{N-1}{N}\underline{\underline{u}}^*\{N-1\} + \frac{1}{N}\underline{\underline{u}}^{(N)}$$

kevert stratégia kiszámitása.

III. Az $\underline{\underline{u}}^*\{N\}$ -nel szemben optimális

/6.78/ $$\underline{\underline{v}}^{(N)} = \underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}}^*\{N\})$$

elem meghatározása /lineáris programozással/.

IV. A

/6.79/ $$\underline{\underline{v}}^*\{N\} = \frac{1}{N}\underline{\underline{v}}^{(1)} + \ldots + \frac{1}{N}\underline{\underline{v}}^{(N)} = \frac{N-1}{N}\underline{\underline{v}}^*\{N-1\} + \frac{1}{N}\underline{\underline{u}}^{(N)}$$

kevert stratégia kiszámitása.

A már adott feltételek mellett érvényes az alábbi

3. TÉTEL: A fiktiv lejátszással nyert $\underline{\underline{u}}^*\{1\}$, $\underline{\underline{u}}^*\{2\}, \ldots$ és $\underline{\underline{v}}^*\{1\}$, $\underline{\underline{v}}^*\{2\}, \ldots$ sorozatok az $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, K)$ poliéder-játék esetén is egy $(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{v}}^*)$ minimax stratégiapár felé konvergálnak:

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{u}}^*\{N\} = \underline{\underline{u}}^* \quad \text{és} \quad \lim_{N\to\infty} \underline{\underline{v}}^*\{N\} = \underline{\underline{v}}^* . \tag{6.80}$$

Itt u* optimális központi program, $\underline{\underline{v}}^*$ pedig az $\underline{\underline{u}}^*$ optimális központi program melletti duális szektorprogramozások optimális árnyékár-rendszereiből összeállitott sorvektor:

$$\underline{\underline{v}}^* = [\underline{\underline{y}}_1^*(\underline{\underline{u}}^*), \quad , \underline{\underline{y}}_n^*(\underline{\underline{u}}^*)] . \tag{6.81}$$

BIZONYITÁS. Kiindulva egy tetszőleges

$$\underline{\underline{u}}^{(1)} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{p}}^{(1)} \qquad \underline{\underline{p}}^{(1)} \in \mathcal{P} \tag{6.82}$$

vektorból, az iteráció bármely szakaszában a III. lépés során /6.62/ miatt $\underline{V}^\Delta$-beli $\underline{\underline{v}}$ vektorra jutunk, tehát a fiktiv lejátszás során tulajdonképpen a $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \underline{\underline{R}})$ mátrixjáték egy fiktiv lejátszását végezzük el, $\underline{\underline{p}}^{(1)} = \underline{\underline{p}}^*\{1\} \to \underline{\underline{q}}^{(1)} = \underline{\underline{q}}^*\{1\} \to \underline{\underline{p}}^{(2)} \to \underline{\underline{p}}^*\{2\} \to \underline{\underline{q}}^{(2)} \to \underline{\underline{q}}^*\{2\} \to \ldots$ alakban. Mivel a Brown-Robinson-tétel szerint mátrixjáték esetén e sorozatok egy $\underline{\underline{p}}^*$, $\underline{\underline{q}}^*$ minimax stratégiapár felé konvergálnak:

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{p}}^*\{N\} = \underline{\underline{p}}^* \quad \text{és} \quad \lim_{N\to\infty} \underline{\underline{q}}^*\{N\} = \underline{\underline{q}}^* , \tag{6.83}$$

következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{u}}^*\{N\} = \lim_{N\to\infty} \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{p}}^*\{N\} = \underline{\underline{U}} \lim_{N\to\infty} \underline{\underline{p}}^*\{N\} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{p}}^* = \underline{\underline{u}}^* \tag{6.84}$$

és

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{v}}^*\{N\} = \lim_{N\to\infty} \underline{\underline{q}}^*\{N\}\underline{\underline{V}} = (\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{q}}^*\{N\})\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{q}}^*\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{v}}^* . \tag{6.85}$$

/6.81/ a 2. tételből azonnal következik.

Az eljárás konvergenciája /különösen $\underline{\underline{u}}^{(1)}$ szerencsétlen megválasztása esetén/ elég lassu lehet, egyes becslések szerint az N -edik lépésbeli hiba $\frac{1}{\sqrt{N}}$ -nel arányos. Gyakorlati számitások szerint a módszer ennél jóval efficiensebb lehet /vö. [9] , 189. oldal/.

Az iteráció leállitásának kérdésével kapcsolatos az alábbi:

4. TÉTEL: a/ Ha az iteráció N -edik szakaszának I. lépése során /maximalizálás $\underline{\underline{v}}^*\{N-1\}$ -gyel szemben/ nyert maximális érték

$$C^*\{N\} = \max_{\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}} \underline{\underline{v}}^*\{N-1\}\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{v}}^*\{N-1\}\underline{\underline{u}}^{(N)} \qquad N = 2,3,\ldots \tag{/6.86/}$$

és a III. lépésben /minimalizálás $\underline{\underline{u}}^*\{N\}$ -nel szemben/ nyert minimális érték:

$$C_*\{N\} = \min_{\underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}^*\{N\} = \underline{\underline{v}}^{(N)}\underline{\underline{u}}^*\{N\}\,, \qquad N = 1,2,\ldots \tag{/6.87/}$$

akkor az optimális C^* hozamra

$$C_*\{N\} \leq C^* \leq C^*\{N\} \qquad N = 2,3,\ldots \tag{/6.88/}$$

/Ha tehát az egymás után kapott $C_*\{1\}, C^*\{2\}, C_*\{2\}, C^*\{3\}, \ldots$ $\ldots, C_*\{N-1\}, C^*\{N\}, C_*\{N\}, \ldots$ értékek közül két szomszédos elég közel van egymáshoz, az iterációt abban a lépésben leállithatjuk és rátérhetünk az elfogadott programok számitására./

b/ Ha az iteráció során N -edik szakaszának IV. lépésében

$$\underline{\underline{y}}_1^*\{N\} = \cdots = \underline{\underline{y}}_n^*\{N\} \tag{/6.89/}$$

áll fenn, az iterációt ebben a lépésben leállithatjuk és rátérhetünk az elfogadott program számitására.

BIZONYITÁS. a/ A /6.88/ egyenlőtlenség a valamely stratégiával szemben optimális stratégiák /6.69/ alatti definiciójából azonnal következik. Ugyanis

$$C^* = \max_{\underline{\underline{u}} \in U} \min_{\underline{\underline{v}} \in V} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} = \max_{\underline{\underline{u}} \in U} \underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}})\,\underline{\underline{u}} \geq$$

/6.90/

$$\geq \underline{\underline{v}}^*(\underline{\underline{u}}^*\{N\})\,\underline{\underline{u}}^*\{N\} = \underline{\underline{v}}^{(N)}\underline{\underline{u}}^*\{N\} = C_*\{N\} \qquad N = 1,2,\ldots$$

és hasonlóképpen

$$C^* = \min_{\underline{\underline{v}} \in V} \max_{\underline{\underline{u}} \in V} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}} = \min_{\underline{\underline{v}} \in V} \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}}) \leq$$

/6.91/

$$\leq \underline{\underline{v}}^*\{N-1\}\,\underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{v}}^*\{N-1\}) = \underline{\underline{v}}^*\{N-1\}\,\underline{\underline{u}}^{(N)} = C^*\{N\}$$

b/ Lásd a 2. tétel b/ állitás megforditását.

6.4. A konkrét modell

Mindenekelőtt felirjuk a 2. fejezetben vázolt, központra és szektorokra bontott dinamikus népgazdasági tervezési modell "teljes központi információs" változatát. Megmutatjuk, hogy a 2. fejezetbeli felbontással nyert konkrét modell valóban speciális esete a 6.1.-beli általános modellnek, s igy alkalmazható rá a 6.2.-6.3. alatt kidolgozott iterációs eljárás.

Vezessük be az alábbi jelöléseket+/ /Vö. 2.1.-2.3./:

+/ A 2. fejezetben szerepelt tevékenységek x_{ikt} volumeneinél $k = 0$ felel meg a szabad importnak, $k = 1, \ldots, s_i^{imp}$ a korlátos importnak, $(k = imp)$, $k = s_i^{imp} + 1, \ldots, s_i^{exp}$ az exportnak $(k = exp)$, $k = s_i^{exp} + 1, \ldots, m_i$ a reprodukáló tevékenységnek $(k = repr)$; végül a beruházó tevékenységek x_{ik} volumeneinél $k = m_i + 1, \ldots, n_i$ $(k = inv)$ indexek szerepelnek. A jelölések áttekinthetősége végett szükség szerint hipermatrixok blokkjainak sorméretét egy melléjük irt, oszlopméretét pedig egy föléjük irt vektorral jelezzük. Ilyenkor a szereplő vektorokat megkülönböztetésül kisebbre irjuk és zárójellel választjuk el a megfelelő mátrixtól.

/6.92/
$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{x}}_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{x}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_{io} \\ \underline{\underline{x}}_{i1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{x}}_{im_i} \\ \underline{\underline{x}}_i^{inv} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{x}}_{ik} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_{ik1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{x}}_{ikT} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,n \\ k = 0,1,\dots,m_i \end{array}$$

$$\underline{\underline{x}}_i^{inv} \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_{i,m_i+1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{x}}_{i,n_i} \end{bmatrix}$$

/6.93/
$$\underline{\underline{F}}_i = [\overbrace{\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{x}}_{io}}, \overbrace{\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{x}}_{i1}}, \dots, \overbrace{\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{x}}_{i,s_i^{imp}}}, \; -\underline{\underline{E}}, \dots, \overbrace{-\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{x}}_{i,s_i^{exp}}}, \; \underline{\underline{E}}, \dots, \overbrace{\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{x}}_{im_i}}, \; \overbrace{\underline{\underline{F}}_i^{inv}}^{\underline{\underline{x}}_i^{inv}}] \qquad i=1,\dots,n$$

ahol

/6.94/
$$\underline{\underline{F}}_i^{inv} = \begin{bmatrix} f_{i,m_i+1,1} & \cdots & f_{i,n_i,1} \\ \vdots & & \\ f_{i,m_i+1,T} & \cdots & f_{i,n_i,T} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\dots,n$$

és $\underline{\underline{E}}$ a $T \times T$ méretü egység-mátrix,

/6.95/
$$\underline{\underline{G}}_{ij} = [\overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{io}}, \overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{i1}}, \dots, \overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{i,s_i^{exp}}}, \; \underline{\underline{G}}_{ij,s_i^{exp}+1}, \dots, \underline{\underline{G}}_{ij,m_i}, \underline{\underline{G}}_{ij}^{inv}] \quad i,j = 1,\dots,n, \; i \neq j$$

/6.96/
$$\underline{\underline{G}}_{ijk} = \langle g_{ijk1}, \dots, g_{ijkT} \rangle = \begin{bmatrix} g_{ijk1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{ijkT} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i,j = 1,\dots,n \;, \; j \neq i \\ k = s_i^{exp}+1,\dots,m_i \end{array}$$

/6.97/
$$\underline{\underline{G}}_{ij}^{inv} = \begin{bmatrix} g_{i,j,m_i+1,1} & \cdots & g_{i,j,n_i,1} \\ \vdots & & \\ g_{i,j,m_i+1,T} & \cdots & g_{i,j,n_i,T} \end{bmatrix} \qquad i,j = 1,\ldots,n \; , \; j \neq i$$

/6.98/
$$\underline{\underline{H}}_i = [\, \overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{i0}} , \overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{i1}} , \ldots , \overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{i,s_i^{exp}}} , \underline{\underline{H}}_{i,s_i^{exp}+1} , \ldots , \underline{\underline{H}}_{i,m_i} , \underline{\underline{H}}_i^{inv} \,] \qquad i = 1,\ldots,n$$

/6.99/
$$\underline{\underline{H}}_{ik} = \langle h_{ik1}, \ldots, h_{ikT} \rangle , \quad k = s_i^{exp}+1, \ldots, m_i \; , \quad i = 1,\ldots,n$$

/6.100/
$$\underline{\underline{H}}_i^{inv} = \begin{bmatrix} h_{i,m_i+1,1} & \cdots & h_{i,n_i,1} \\ & & \\ h_{i,m_i+1,T} & \cdots & h_{i,n_i,T} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\ldots,n$$

/6.101/
$$\underline{\underline{A}}'_i = [\, \overbrace{\underline{\underline{O}}}^{\underline{\underline{x}}_{i0}} , \underline{\underline{A}}'_{i1} , \ldots , \underline{\underline{A}}'_{im_i} , \underline{\underline{A}}_i^{\prime inv} \,] \qquad i = 1,\ldots,n$$

/6.102/
$$\underline{\underline{A}}'_{ik} = \begin{bmatrix} a'_{i,1,k,1} & \cdots & a'_{i,1,k,T} \\ \vdots & & \\ a'_{i,m'_i,k,1} & \cdots & a'_{i,m'_i,k,T} \end{bmatrix} \qquad k = 1,\ldots,m_i \; , \; i = 1,\ldots,n$$

/6.103/
$$\underline{\underline{A}}_i^{\prime inv} = \begin{bmatrix} a'^{inv}_{i,1,m_i+1} & \cdots & a'^{inv}_{i,1,n_i} \\ \vdots & & \\ a'^{inv}_{i,m'_i,m_i+1} & \cdots & a'^{inv}_{i,m_i,n_i} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\ldots,n$$

/6.104/ $$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{Z}}_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{Z}}_i = \begin{bmatrix} Z_{i1} \\ \vdots \\ Z_{iT} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.105/ $$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{Q}}_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{Q}}_i = \begin{bmatrix} Q_{i1} \\ \vdots \\ Q_{iT} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.106/ $$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_T \end{bmatrix}$$

/6.107/ $$\underline{\underline{b}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{b}}'_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{b}}'_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{b}}'_i = \begin{bmatrix} b'_{i1} \\ \vdots \\ b'_{i,m'_i} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.108/ $$\underline{\underline{c}} = [\underline{\underline{c}}_1, \dots, \underline{\underline{c}}_n], \quad \underline{\underline{c}}_i = [\underline{\underline{c}}_{i0}, \dots, \underline{\underline{c}}_{i,n_i}, \underline{\underline{c}}_i^{inv}] \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.109/ $$\underline{\underline{c}}_{ik} = [c_{ik1}, \dots, c_{ikT}], \quad k = 0, 1, \dots, m_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\underline{\underline{c}}_i^{inv} = [\, c_{i,m_i+1}, \dots, c_{i,n_i} \,] \qquad i = 1, \dots, n \tag{6.110}$$

Ezen jelölések bevezetésével a teljes információs feladat az alábbi lineáris programozási feladatot jelenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\underline{\underline{F}}_1 \underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{G}}_{21} \underline{\underline{x}}_2 + \dots + \underline{\underline{G}}_{n1} \underline{\underline{x}}_n \leq -\underline{\underline{Q}}_1 \\ +\underline{\underline{G}}_{12} \underline{\underline{x}}_1 - \underline{\underline{F}}_2 \underline{\underline{x}}_2 + \dots + \underline{\underline{G}}_{n2} \underline{\underline{x}}_n \leq -\underline{\underline{Q}}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\underline{\underline{G}}_{1n} \underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{G}}_{2n} \underline{\underline{x}}_2 + \dots + \underline{\underline{F}}_n \underline{\underline{x}}_n \leq -\underline{\underline{Q}}_n \end{array} \right. \tag{6.111}$$

$$\underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{x}}_2 + \dots + \underline{\underline{H}}_n \underline{\underline{x}}_n \leq \underline{\underline{W}} \tag{6.112}$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \underline{\underline{A}}'_1 \underline{\underline{x}}_1 & & & \leq & \underline{\underline{b}}'_1 \\ & \underline{\underline{A}}'_2 \underline{\underline{x}}_2 & & \leq & \underline{\underline{b}}'_2 \\ & & \ddots \quad \underline{\underline{A}}'_n \underline{\underline{x}}_n & \leq & \underline{\underline{b}}'_n \end{array} \right. \tag{6.113}$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \underline{\underline{F}}_1 \underline{\underline{x}}_1 & & & \leq & \underline{\underline{Z}}_1 \\ & \underline{\underline{F}}_2 \underline{\underline{x}}_2 & & \leq & \underline{\underline{Z}}_2 \\ & & \ddots \quad \underline{\underline{F}}_n \underline{\underline{x}}_n & \leq & \underline{\underline{Z}}_n \end{array} \right. \tag{6.114}$$

$$\underline{\underline{x}}_1 \geq \underline{\underline{0}}, \; \underline{\underline{x}}_2 \geq \underline{\underline{0}}, \dots, \; \underline{\underline{x}}_n \geq \underline{\underline{0}} \tag{6.115}$$

/6.116/ $$\underline{\underline{c}}_1\underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{c}}_2\underline{\underline{x}}_2 + \cdots + \underline{\underline{c}}_n\underline{\underline{x}}_n = \max!$$

Ha még bevezetjük az

/6.117/ $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \\ \underline{\underline{H}} \\ \underline{\underline{A}}' \\ \underline{\underline{F}} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{W}} \\ \underline{\underline{b}}' \\ \underline{\underline{Z}} \end{bmatrix}$$

/6.118/ $$\underline{\underline{\mathfrak{F}}} = [\overbrace{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}_1}^{\underline{\underline{x}}_1}, \ldots, \overbrace{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}_n}^{\underline{\underline{x}}_n}] = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{F}}_1 & \underline{\underline{G}}_{21} & \cdots & \underline{\underline{G}}_{n1} \\ \underline{\underline{G}}_{12} & -\underline{\underline{F}}_2 & \cdots & \underline{\underline{G}}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{\underline{G}}_{12} & -\underline{\underline{G}}_{2n} & & -\underline{\underline{F}}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{H}} = [\underline{\underline{H}}_1, \ldots, \underline{\underline{H}}_n]$$

/6.119/ $$\underline{\underline{A}}' = [\overbrace{\underline{\underline{A}}_1'^{\,o}}^{\underline{\underline{x}}_1}, \ldots, \overbrace{\underline{\underline{A}}_n'^{\,o}}^{\underline{\underline{x}}_n}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\underline{A}}_n' \end{bmatrix}$$

/6.120/ $$\underline{\underline{F}} = [\overbrace{\underline{\underline{F}}_1^{o}}^{\underline{\underline{x}}_1}, \ldots, \overbrace{\underline{\underline{F}}_n^{o}}^{\underline{\underline{x}}_n}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\underline{F}}_n \end{bmatrix}$$

jelöléseket /üresen hagyott helyeken o áll/, világos, hogy a /6.111/-/6.116/ feladat a /6.1/-/6.3/ alatt szereplő általános

/6.121/ $$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} \leq \underline{\underline{b}} \\ \quad\ \underline{\underline{x}} \geq \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{x}} = \max! \end{cases}$$

alakba irható, tehát valóban speciális esete a 6.1. pontban szereplő általános teljes központi információs feladatnak.

Most megadjuk e feladat egy felbontását központra és szektorokra, majd az 5. tételben bebizonyitjuk, hogy az adott felbontás reguláris, és igy alkalmazható rá a kidolgozott iterációs eljárás.

A felbontást a /6.117/ alatti $\underline{\underline{A}}$ mátrix és ennek megfelelően, a $\underline{\underline{c}}$ vektor egy particionálásával, továbbá egy alkalmas $\underline{\underline{u}}$ központi program és a megfelelő $\underline{\underline{D}}$ mátrix és $\underline{\underline{d}}$ vektor megadása utján határozzuk meg.

Legyen az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{c}}$ particionálása:

/6.122/
$$\underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{A}}_1, \dots, \underline{\underline{A}}_n] \qquad \underline{\underline{c}} = [\underline{\underline{c}}_1, \dots, \underline{\underline{c}}_n]$$

ahol

/6.123/
$$\underline{\underline{A}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_i \\ \underline{\underline{H}}_i \\ \underline{\underline{A}}_i'^{o} \\ \underline{\underline{F}}_i^{o} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

tehát a /6.111/-/6.114/ feltételekben az $\underline{\underline{x}}_i$ oszlopban álló mátrix-blokk.

Az $\underline{\underline{u}}$ központi programot az alábbi alakban vezetjük be:

/6.124/
$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{u}}_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{u}}_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -\underline{\underline{q}}_i \\ \underline{\underline{w}}_i \\ \underline{\underline{u}}_i' \\ \underline{\underline{u}}_i'' \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (\underline{\underline{Q}} \\ (\underline{\underline{W}} \\ (\underline{\underline{b}}' \\ (\underline{\underline{Z}} \end{array} \qquad i = 1, \dots, n$$

ahol

/6.125/
$$\underline{\underline{q}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_{i1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_{in} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{q}}_{ii} = \underline{\underline{r}}_i = \begin{bmatrix} z_{i1} \\ \\ \bar{z}_{iT} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{q}}_{ij} = -\underline{\underline{z}}_{ij} = -\begin{bmatrix} z_{ij1} \\ \vdots \\ z_{ijT} \end{bmatrix} \quad j \neq i, \ i = 1, \dots, n$$

/6.126/ $$\underline{\underline{w}}_i = \begin{bmatrix} w_{i1} \\ \vdots \\ w_{iT} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\dots,n$$

/6.127/ $$\underline{\underline{u}}'_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}'_{i1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{u}}'_{in} \end{bmatrix} \begin{matrix} (\underline{\underline{b}}'_1 \\ \\ (\underline{\underline{b}}'_n \end{matrix} \qquad \underline{\underline{u}}''_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}''_{i1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{u}}''_{in} \end{bmatrix} \begin{matrix} (\underline{\underline{Z}}_1 \\ \\ (\underline{\underline{Z}}_n \end{matrix} \qquad i = 1,\dots,n$$

A /6.21/-ban szereplő

/6.128/ $$\underline{\underline{u}}_1 + \dots + \underline{\underline{u}}_n = \underline{\underline{b}}$$

"felosztási" feltétel most a következőket jelenti:

/6.129/ $$\underline{\underline{r}}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \underline{\underline{z}}_{ij} = \underline{\underline{Q}}_j \qquad j = 1,\dots,n$$

/6.130/ $$\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{w}}_i = W$$

/6.131/ $$\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{u}}'_{ij} = \underline{\underline{b}}'_j \qquad j = 1,\dots,n$$

/6.132/ $$\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{u}}''_{ij} = \underline{\underline{Z}}_j \qquad j = 1,\dots,n$$

A $\underline{\underline{D}}$ mátrixot és a $\underline{\underline{d}}$ vektort ugy fogjuk megválasztani, hogy a /6.22/ alatti

/6.133/ $$\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{u}} \leq \underline{\underline{d}}$$

egyenlőtlenség folyományaként az alábbiak teljesülnek:

/6.134/ $\quad \underline{\underline{o}} \le \underline{\underline{r}}_i \le \underline{\underline{Z}}_i \,, \quad \underline{\underline{z}}_{ij} \ge \underline{\underline{o}} \,, \quad i = 1, \dots, n \,, \quad j = 1, \dots, n$

/6.135/ $\quad \underline{\underline{w}}_i \ge \underline{\underline{o}} \,, \quad i = 1, \dots, n$

/6.136/ $\quad \underline{\underline{u}}'_{ii} = \underline{\underline{b}}'_i \,, \quad \underline{\underline{u}}'_{ij} = \underline{\underline{o}} \,, \quad j \ne i \,, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$

/6.137/ $\quad \underline{\underline{u}}''_{ii} = \underline{\underline{Z}}_i \,, \quad \underline{\underline{u}}''_{ij} = \underline{\underline{o}} \,, \quad j \ne i \,, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots; n.$

Ezt igy érhetjük el:

/6.138/
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\underline{D}}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_i^{(q)} & & & \\ & \underline{\underline{D}}_i^{(w)} & & \\ & & \underline{\underline{D}}'_i & \\ & & & \underline{\underline{D}}''_i \end{bmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.139/
$$\underline{\underline{d}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{d}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{d}}_n \end{bmatrix} \qquad d_i = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} \underline{\underline{d}}_i^{(q)} \\ \underline{\underline{d}}_i^{(w)} \\ \underline{\underline{d}}'_i \\ \underline{\underline{d}}''_i \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (\underline{\underline{q}}_i \\ (\underline{\underline{w}}_i \\ (\underline{\underline{u}}'_i \\ (\underline{\underline{u}}''_i \end{array} \end{array} \qquad i = 1, \dots, n$$

ahol

/6.140/
$$\underline{\underline{D}}_i^{(q)} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \underline{\underline{E}} & & & & \\ & & & \underline{\underline{E}} & & & \\ & & & -\underline{\underline{E}} & & & \\ & & & & \underline{\underline{E}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \underline{\underline{E}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (\underline{\underline{z}}_{i1} \\ \\ (\underline{\underline{z}}_{i,i-1} \\ (\underline{\underline{r}}_i \\ (\underline{\underline{r}}_i \\ (\underline{\underline{z}}_{i,i+1} \\ \\ (\underline{\underline{z}}_{in} \end{array} \end{array} \qquad \underline{\underline{d}}_i^{(q)} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \underline{\underline{o}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{Z}}_i \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{o}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (\underline{\underline{z}}_{i1} \\ \\ (\underline{\underline{z}}_{i,i-1} \\ (\underline{\underline{r}}_i \\ (\underline{\underline{r}}_i \\ (\underline{\underline{z}}_{i,i+1} \\ \\ (\underline{\underline{z}}_{in} \end{array} \end{array} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.141/ $\quad \underline{\underline{D}}_i^{(w)} = -\underline{\underline{E}} \qquad \underline{\underline{d}}_i^{(w)} = \underline{\underline{o}} \qquad i = 1, \dots, n$

/6.142/
$$\underline{\underline{D}}'_i = \left[\begin{array}{cccc} \underline{\underline{E}} & & & \\ -\underline{\underline{E}} & & & \\ & \underline{\underline{E}} & & \\ & -\underline{\underline{E}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\underline{E}} \\ & & & -\underline{\underline{E}} \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{\underline{u}}'_{i1} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i1} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i2} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i2} \\ \\ (\underline{\underline{u}}'_{in} \\ (\underline{\underline{u}}'_{in} \end{array} \qquad \underline{\underline{d}}'_i = \left[\begin{array}{c} \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{b}}'_i \\ -\underline{\underline{b}}_i \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{\underline{u}}'_{i1} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i1} \\ \\ (\underline{\underline{u}}'_{i,i-1} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i,i-1} \\ (\underline{\underline{u}}'_{ii} \\ (\underline{\underline{u}}'_{ii} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i,i+1} \\ (\underline{\underline{u}}'_{i,i+1} \\ \\ (\underline{\underline{u}}'_{in} \\ (\underline{\underline{u}}'_{in} \end{array} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.143/
$$\underline{\underline{D}}''_i = \left[\begin{array}{cccc} \underline{\underline{E}} & & & \\ -\underline{\underline{E}} & & & \\ & \underline{\underline{E}} & & \\ & -\underline{\underline{E}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\underline{E}} \\ & & & -\underline{\underline{E}} \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{\underline{u}}''_{i1} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i1} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i2} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i2} \\ \\ (\underline{\underline{u}}''_{in} \\ (\underline{\underline{u}}''_{in} \end{array} \qquad \underline{\underline{d}}''_i = \left[\begin{array}{c} \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{Z}}_i \\ -\underline{\underline{Z}}_i \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{o}} \\ \underline{\underline{o}} \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{\underline{u}}''_{i1} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i1} \\ \\ (\underline{\underline{u}}''_{i,i-1} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i,i-1} \\ (\underline{\underline{u}}''_{ii} \\ (\underline{\underline{u}}''_{ii} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i,i+1} \\ (\underline{\underline{u}}''_{i,i+1} \\ \\ (\underline{\underline{u}}''_{in} \\ (\underline{\underline{u}}''_{in} \end{array} \qquad i = 1, \dots, n$$

A /6.140/, /6.141/ és /6.143/ egyenletekben $T \times T$ méretü, /6.142/-ben pedig $m'_i \times m'_i$ méretü $\underline{\underline{E}}$ egységmátrixokat szerepeltettünk.

A központi feltételek ezek után a következő alakot öltik: az $\underline{\underline{u}}_i$ vektorokból csak az $\underline{\underline{r}}_i$, $\underline{\underline{z}}_{ij}$ ($j \neq i$) és $\underline{\underline{w}}_i$ részek változnak és kielégitik a /6.129/-/6.130/ és /6.134/-/6.135/ feltételeket.

Adott központi program esetén az i -edik szektorprogramozás feladata a /6.23/-ban szereplő általános

/6.144/
$$\begin{cases} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{u}_i \\ \mathbf{x}_i \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i = \max! \end{cases}$$

alakból a fenti jelölésekkel a következő alaku lesz:

/6.145/
$$\begin{cases} \mathbf{G}_{i1} \mathbf{x}_i \le \mathbf{z}_{i1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{G}_{i,i-1} \mathbf{x}_i \le \mathbf{z}_{i,i-1} \\ -\mathbf{F}_i \mathbf{x}_i \le -\mathbf{r}_i \\ \mathbf{G}_{i,i+1} \mathbf{x}_i \le \mathbf{z}_{i,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{G}_{in} \mathbf{x}_i \le \mathbf{z}_{in} \\ \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{w}_i \\ \mathbf{A}'_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{b}'_i \\ \mathbf{F}_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{x}_i \ge \mathbf{0} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

/6.146/
$$\mathbf{c}_i \mathbf{x}_i = \max!$$

Ennek megfelelően az $\mathbf{y}_i$ árnyékárrendszert is

/6.147/
$$\mathbf{y}_i = [\, \boldsymbol{\zeta}_{i1}, \dots, \boldsymbol{\zeta}_{i,i-1}, \boldsymbol{\varrho}_i, \boldsymbol{\zeta}_{i,i+1}, \dots, \boldsymbol{\zeta}_{in}, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varphi}_i \,]$$

alakban célszerü felvenni; $\boldsymbol{\zeta}_{ij} = [\zeta_{ij1}, \dots, \zeta_{ijT}]$ a $\mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}_i \le \mathbf{z}_{ij}$ $(j \neq i)$ $\boldsymbol{\varrho}_i = [\varrho_{i1}, \dots, \varrho_{iT}]$ a $-\mathbf{F}_i \mathbf{x}_i \le -\mathbf{r}_i$ /azaz $\mathbf{F}_i \mathbf{x}_i \ge \mathbf{r}_i$ / $\boldsymbol{\omega}_i = [\omega_{i1}, \dots, \omega_{iT}]$ a $\mathbf{H}_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{w}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_i = [\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i,m'_i}]$ az $\mathbf{A}'_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{b}'_i$, végül $\boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{iT}]$ az $\mathbf{F}_i \mathbf{x}_i \le \mathbf{Z}_i$

részfeltételeknek megfelelő árnyékárrendszer. A duális szektorfeladatok ekkor a következő alakba irhatók:

$$
/6.148/ \quad \begin{cases} -\varrho_i F_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \zeta_{ij} G_{ij} + \omega_i H_i + \sigma_i A'_i + \varphi_i F_i \geq c_i \\ \varrho_i \geq 0, \quad \zeta_{ij} \geq 0, \quad (j \neq i), \quad \omega_i \geq 0, \quad \sigma_i \geq 0, \quad \varphi_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,n \end{cases}
$$

$$
/6.148/ \qquad -\varrho_i r_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \zeta_{ij} z_{ij} + \omega_i w_i + \sigma_i b'_i + \varphi_i Z_i = \min!
$$

jelöléseink és a felállitott központi feltételek és szektorprogramozások teljes összhangban vannak a 2. fejezetben tárgyaltakkal. Az itteni feltételrendszerek a tömörebb mátrix-, illetve vektor-alakba vannak öntve.

5. TÉTEL. A konkrét modell teljes központi információs feladatának a fenti /6.122/ particionálással és a /6.124/-/6.127/ alatt bevezetett központi programmal, valamint a rá vonatkozó /6.129/-/6.130/ és /6.134/-/6.137/ feltételekkel értelmezett felbontása reguláris felbontás.

BIZONYITÁS. I. A mondott feltételekkel az u központi programra megengedett $\mathcal{U}$ halmaz először is nem üres, mert tartalmazza például az alábbi elemekkel definiált $\hat{u}$ vektort:

$$
/6.149/ \qquad \hat{r}_i = Q_i, \quad \hat{z}_{ji} = 0 \qquad i,j = 1,\dots,n, \quad j \neq i
$$

$$
/6.150/ \qquad \hat{w}_1 = W \quad \hat{w}_2 = \dots = \hat{w}_n = 0
$$

/a /6.136/-/6.137/ választásokat is beleértve/. $\mathcal{U}$ ezenkivül korlátos is, hiszen

$$
\left.\begin{array}{ll} /6.151/ & Q_i \leq r_i \leq Z_i \\ /6.152/ & 0 \leq z_{ji} \leq Z_i - Q_i \\ /6.153/ & 0 \leq w_i \leq W \end{array}\right\} \quad i = 1,\dots,n
$$

II. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\underline{\underline{u}} \in U$ központi program mellett az összes szektorprogramozások megoldhatók. Ezt azáltal végezzük el, hogy alkalmazzuk a megoldhatóságra vonatkozó /6.27/ kritériumot, más szóval megmutatjuk, hogy mind a primer, mind a duál szektorprogramozásoknál van megengedett program, illetve árnyékárrendszer tetszőleges központi program esetén.

a/ Ami az elsőt illeti, tetszőleges megengedett központi program esetén megengedett az i -edik szektorban az alábbi részekből álló $\hat{\underline{\underline{x}}}_i$ program:

/6.154/ $\hat{\underline{\underline{x}}}_{io} = \underline{\underline{r}}_i\ ,\quad \hat{\underline{\underline{x}}}_{ik} = \underline{\underline{0}}\qquad (k = 1,\dots,m_i)\ ,\quad \hat{\underline{\underline{x}}}_i^{inv} = \underline{\underline{0}}\ .$

Ez abból következik, hogy a /6.145/ feltételekben szereplő $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix $\underline{\underline{x}}_{io}$ -nak megfelelő első T -oszlopos blokkja /6.93/, /6.95/, /6.98/ és /6.101/ szerint csupa 0 -t tartalmaz, kivéve a $-\underline{\underline{F}}_i \underline{\underline{x}}_i \leq -\underline{\underline{r}}_i$ és $\underline{\underline{F}}_i \underline{\underline{x}}_i \leq \underline{\underline{Z}}_i$ feltételeknek megfelelő részeket, ahol $-\underline{\underline{E}}$, illetve $\underline{\underline{E}}$ szerepel. A /6.154/ alatti értékeket behelyettesitve tehát

/6.155/ $\underline{\underline{G}}_{ij} \hat{\underline{\underline{x}}}_i = \underline{\underline{0}}\qquad (j \neq i)\ ;$

/6.156/ $\underline{\underline{H}}_i \hat{\underline{\underline{x}}}_i = \underline{\underline{0}}\ ,\quad \underline{\underline{A}}'_i \hat{\underline{\underline{x}}}_i = \underline{\underline{0}}$

és

/6.157/ $-\underline{\underline{F}}_i \hat{\underline{\underline{x}}}_i = -\underline{\underline{r}}_i\qquad \underline{\underline{F}}_i \hat{\underline{\underline{x}}}_i = \underline{\underline{r}}_i$.

Mivel 2.-beli feltevés szerint $\underline{\underline{b}}'_i \geq \underline{\underline{0}}$, a többi korlátra pedig a /6.134/-/6.135/ központi feltételek érvényesek, ezen $\hat{\underline{\underline{x}}}_i$ program kielégiti a /6.145/ alatti feltételeket.

b/ A megengedett árnyékárrendszer megkonstruálásához a /6.146/-/6.147/ feltételeket a /6.93/-/6.110/ alatti bontásnak megfelelő részletezéssel kell felirnunk. Ebből az alábbi feltételrendszert kapjuk:

/6.158/ $-\underline{\underline{\rho}}_i + \underline{\underline{\varphi}}_i \geq \underline{\underline{c}}_{io}$

/6.159/ $-\underline{\underline{\rho}}_i + \underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{A}}'_{ik} + \underline{\underline{\varphi}}_i \geq \underline{\underline{c}}_{ik}\qquad k = imp$

/6.160/ $\underline{\underline{\rho}}_i + \underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{A}}'_{ik} - \underline{\underline{\varphi}}_i \geq \underline{\underline{c}}_{ik}\qquad k = exp$

/6.161/ $$-\underline{\underline{\varrho}}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underline{\underline{\zeta}}_{ij}\, \underline{\underline{G}}_{ijk} + \underline{\underline{\omega}}_i \underline{\underline{H}}_{ik} + \underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{A}}'_{ik} + \underline{\underline{\varphi}}_i \geq \underline{\underline{c}}_{ik} \qquad k = \mathrm{repr}$$

/6.162/ $$-\underline{\underline{\varrho}}_i \underline{\underline{F}}_i^{inv} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underline{\underline{\zeta}}_{ij}\, \underline{\underline{G}}_{ij}^{inv} + \underline{\underline{\omega}}_i \underline{\underline{H}}_i^{inv} + \underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{A}}_i^{\prime inv} + \underline{\underline{\varphi}}_i \underline{\underline{F}}_i^{inv} \geq \underline{\underline{c}}_i^{inv}$$

/6.163/ $$\underline{\underline{\varrho}}_i \geq \underline{\underline{o}},\ \underline{\underline{\zeta}}_{ij} \geq \underline{\underline{o}}\ (j\neq i),\ \underline{\underline{\omega}}_i \geq \underline{\underline{o}},\ \underline{\underline{\sigma}}_i \geq \underline{\underline{o}},\ \underline{\underline{\varphi}}_i \geq \underline{\underline{o}}\,.$$

Az $\hat{\underline{\underline{y}}}_i$ megengedett árnyékárrendszer konstrukcióját lépésenként végezzük el. Először megválasztjuk a $\hat{\underline{\underline{\zeta}}}_{ij}$ $(j \neq i)$, $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_i$ és $\hat{\underline{\underline{\varphi}}}_i$ részeket az alábbi módon:

/6.164/ $$\hat{\underline{\underline{\zeta}}}_{ij} = \underline{\underline{o}} \quad (j\neq i), \quad \underline{\underline{\sigma}}_i = \underline{\underline{o}}, \quad \hat{\underline{\underline{\varphi}}}_i = \underline{\underline{o}}\,.$$

A hátralevő $\hat{\underline{\underline{\varrho}}}_i$ és $\hat{\underline{\underline{\omega}}}_i$ részeknek ekkor az alábbi feltételeket kell kielégiteniük:

/6.165/ $$\hat{\underline{\underline{\varrho}}}_i \leq -\underline{\underline{c}}_{ik} \qquad k = o, imp$$

/6.166/ $$\hat{\underline{\underline{\varrho}}}_i \geq \underline{\underline{c}}_{ik} \qquad k = \mathrm{exp}$$

/6.167/ $$\hat{\underline{\underline{\omega}}}_i \underline{\underline{H}}_{ik} \geq \underline{\underline{c}}_{ik} + \hat{\underline{\underline{\varrho}}}_i \qquad k = \mathrm{repr}$$

/6.168/ $$\hat{\underline{\underline{\omega}}}_i \underline{\underline{H}}_i^{inv} \geq \underline{\underline{c}}_i^{inv} + \hat{\underline{\underline{\varrho}}}_i \underline{\underline{F}}_i^{inv}$$

/6.169/ $$\hat{\underline{\underline{\varrho}}}_i \geq \underline{\underline{o}}$$

/6.170/ $$\hat{\underline{\underline{\omega}}}_i \geq \underline{\underline{o}}$$

Emlékeztetünk a 2. fejezetbeli /2.14/ feltételezésre, amely szerint

$$\max_{k=exp} c_{ikt} \leq \min_{k=0,imp} (-c_{ikt}) \qquad t=1,\dots,T. \tag{6.171}$$

Ezért a /6.165/, /6.166/ és /6.169/ feltételeknek eleget tesz például a

$$\underline{\underline{\hat{\rho}}}_i = [\hat{\rho}_{i1},\dots,\hat{\rho}_{iT}] \qquad \hat{\rho}_{it} = \max_{k=exp} c_{ikt} \qquad t=1,\dots,T \tag{6.172}$$

rendszer. Válasszuk meg így $\underline{\underline{\hat{\rho}}}_i$ értékét. Ekkor már csak $\underline{\underline{\hat{\omega}}}_i$ értékét kell úgy megválasztanunk, hogy teljesüljenek a /6.167/, /6.168/ és /6.170/ feltételek a /6.172/ alatti $\underline{\underline{\hat{\rho}}}_i$ mellett. E feltételek /6.99/ és /6.100/ alapján részletesebben a következőket jelentik:

$$h_{ikt}\,\hat{\omega}_{it} \geq c_{ikt} + \hat{\rho}_{it} \qquad k=repr,\ t=1,\dots,T \tag{6.173}$$

$$\sum_{t=1}^{T} h_{ikt}\,\hat{\omega}_{it} \geq c_{ik} + \sum_{t=1}^{T} f_{ikt}\,\hat{\rho}_{it} \qquad k=inv\ . \tag{6.174}$$

Emlékeztetünk arra, hogy a 2. fejezetbeli /2.9/ egyenlőtlenségnél feltettük, minden szektorban és minden időpontban a reprodukáló tevékenységek igényelnek munkaerőt, tehát

$$h_{ikt} > 0 \qquad t=1,\dots,T;\ k=repr;\ i=1,\dots,n, \tag{6.175}$$

és azt is, hogy minden szektorban és minden beruházó tevékenységnél vannak olyan t időpontok, amelyeknél szükség van munkaerőre, tehát legalább egy t -re $(1 \leq t \leq T)$

$$h_{ikt} > 0 \qquad k=inv;\ i=1,\dots,n\ . \tag{6.176}$$

E szerint léteznek a

$$\Theta_{it} = \max\left(\max_{k=repr} \frac{c_{ikt}+\hat{\rho}_{it}}{h_{ikt}},\ 0\right) \qquad t=1,\dots,T \tag{6.177}$$

és

$$\vartheta_{it} = \begin{cases} 0, & \text{ha } h_{i,m_i+1,t} = \dots = h_{i,n_i,t} = 0 \\ \max\left[\max\limits_{\substack{k=inv \\ h_{ikt}>0}} \dfrac{c_{ik} + \sum\limits_{\tau=1}^{T} f_{ik\tau}\hat{\varrho}_{i\tau}}{h_{ikt}}, 0\right] & \end{cases} \qquad t = 1,\dots,T \tag{6.178}$$

mennyiségek. Világos, hogy ha $\hat{\underline{\underline{\omega}}}_i$ -t az

$$\hat{\underline{\underline{\omega}}}_i = [\hat{\omega}_{i1},\dots,\hat{\omega}_{iT}], \quad \hat{\omega}_{it} = \max(\Theta_{it}, \vartheta_{it}) \qquad t = 1,\dots,T \tag{6.179}$$

alakban választjuk meg, teljesülnek a /6.173/-/6.174/ egyenlőtlenségek, s igy végül a /6.164/, /6.172/ és /6.179/ alatti elemekkel megengedett szektorbeli árnyékárrendszert kaptunk. Ezzel a felbontás reguláris voltához szükséges II. feltétel teljesülését is igazoltuk.

III. Be kell látnunk, hogy a teljes központi információs modell minden megengedett programja előállitható valamilyen központi program szerinti szektorbeli megengedett programokból. Legyen tehát

$$\hat{\underline{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\underline{x}}}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\underline{\underline{x}}}_n \end{bmatrix} \tag{6.180}$$

tetszőleges megengedett program, más szóval $\hat{\underline{\underline{x}}}_1,\dots,\hat{\underline{\underline{x}}}_n$ tegyenek eleget a /6.111/-/6.115/ feltételeknek. Most definiálunk egy megengedett $\hat{\underline{\underline{u}}}$ központi programot, amely mellett $\hat{\underline{\underline{x}}}_1$ az első, ..., $\hat{\underline{\underline{x}}}_n$ az n--edik szektorbeli /6.145/ alaku feltételeknek tesz eleget.

Legyen

$$\hat{\underline{\underline{r}}}_i = \underline{\underline{F}}_i \hat{\underline{\underline{x}}}_i \qquad i = 1,\dots,n \tag{6.181}$$

$$
/6.182/ \quad \begin{cases}
\underline{\underline{\hat{z}}}_{21} = \underline{\underline{G}}_{21}\underline{\underline{\hat{x}}}_{2}, \dots, \underline{\underline{\hat{z}}}_{n-1,1} = \underline{\underline{G}}_{n-1,1}\underline{\underline{\hat{x}}}_{n-1}, & \underline{\underline{\hat{z}}}_{n1} = \underline{\underline{F}}_{1}\underline{\underline{\hat{x}}}_{1} - \sum\limits_{j=2}^{n-1} \underline{\underline{G}}_{j1}\underline{\underline{\hat{x}}}_{j} - \underline{\underline{Q}}_{1} \\
\underline{\underline{\hat{z}}}_{12} = \underline{\underline{G}}_{12}\underline{\underline{\hat{x}}}_{1}, \dots, \underline{\underline{\hat{z}}}_{n-1,2} = \underline{\underline{G}}_{n-1,2}\underline{\underline{\hat{x}}}_{n-1}, & \underline{\underline{\hat{z}}}_{n2} = \underline{\underline{F}}_{2}\underline{\underline{\hat{x}}}_{2} - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \underline{\underline{G}}_{j2}\underline{\underline{\hat{x}}}_{j} - \underline{\underline{Q}}_{2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\underline{\underline{\hat{z}}}_{1n} = \underline{\underline{G}}_{1n}\underline{\underline{\hat{x}}}_{1}, \dots, \underline{\underline{\hat{z}}}_{n-2,n} = \underline{\underline{G}}_{n-2,n}\underline{\underline{\hat{x}}}_{n-2}, & \underline{\underline{\hat{z}}}_{n-1,n} = \underline{\underline{F}}_{n}\underline{\underline{x}}_{n} - \sum\limits_{j=1}^{n-2} \underline{\underline{G}}_{jn}\underline{\underline{\hat{x}}}_{j} - \underline{\underline{Q}}_{n}
\end{cases}
$$

$$
/6.183/ \quad \underline{\underline{\hat{w}}}_{1} = \underline{\underline{H}}_{1}\,\underline{\underline{\hat{x}}}_{1}, \dots, \underline{\underline{\hat{w}}}_{n-1} = \underline{\underline{H}}_{n-1}\,\underline{\underline{x}}_{n-1}, \quad \underline{\underline{w}}_{n} = \underline{\underline{W}} - \sum_{i=1}^{n-1} \underline{\underline{H}}_{i}\underline{\underline{\hat{x}}}_{i}
$$

$$
/6.184/ \quad \underline{\underline{\hat{u}}}'_{ii} = \underline{\underline{b}}'_{i}, \quad \underline{\underline{\hat{u}}}_{ij} = \underline{\underline{o}} \qquad \underline{\underline{\hat{u}}}''_{ii} = \underline{\underline{Z}}_{i}, \quad \underline{\underline{\hat{u}}}''_{ij} = \underline{\underline{o}} \qquad i,j = 1,\dots,n, \ i \neq j .
$$

Világos, hogy $\underline{\underline{\hat{x}}}_{i}$ kielégiti ilyen $\underline{\underline{\hat{u}}}$ mellett a /6.145/ feltételeket, és arról is könnyen meggyőződhetünk, hogy a definiált elemekkel $\underline{\underline{\hat{u}}}$ kielégiti a /6.129/-/6.130/ és /6.134/-/6.137/ alatti központi feltételeket, hacsak $\underline{\underline{\hat{x}}}_{1}, \dots, \underline{\underline{\hat{x}}}_{n}$ kielégitik a /6.111/-/6.115/ feltételeket.

Ezzel a 5. tétel bizonyitását befejeztük, igazoltuk, hogy konkrét modellünkre alkalmazható az általános iterativ eljárás. A hátralevő részben a szükséges számitások lépéseit részletezzük.

6.5. A számitás menete a konkrét modellben.

Itt lényegében az iteráció N -edik szakaszának négy lépését kell felirnunk a konkrét modellben. Az I. és III. lépés lineáris programozást, a II. és IV. lépés közepelést igényel. Az I. lépésbeli lineáris programozás /a szektoroktól kapott árnyékárrendszerek központi értékelése/ rangsorolással megoldható "mikroprogramozásokra" bomlik, a III. lépésbeli programozás pedig szektoronkénti duális feladatok megoldására, illetve korábbi hasonló feladatok korrigálására vezet /a központi program értékelése a szektorokban/.

Megjegyezzük, hogy az általános modellben bevezetett jelöléseket használjuk értelemszerü módositásokkal.

I. A szektoroktól kapott árnyékárrendszer központi értékelése

Tetszőleges $\underline{\underline{\varrho}}_{i}, \underline{\underline{\zeta}}_{ij}\ (j \neq i), \underline{\underline{\omega}}_{i}, \underline{\underline{\sigma}}_{i}, \underline{\underline{\varphi}}_{i}\ (i = 1, \dots, n)$ árnyékárrendszer melletti központi maximalizálás feladata az alábbi programozás:

/6.185/ $$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underline{\underline{z}}_{ji} + \underline{\underline{Q}}_i = \underline{\underline{r}}_i \leq \underline{\underline{Z}}_i \qquad i = 1,\dots,n$$

/6.186/ $$\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{w}}_i = \underline{\underline{W}}$$

/6.187/ $$\underline{\underline{r}}_i \geq \underline{\underline{0}}\,, \quad \underline{\underline{z}}_{ji} \geq \underline{\underline{0}}\,, \quad \underline{\underline{w}}_i \geq \underline{\underline{0}}$$

/6.188/ $$-\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{\rho}}_i \underline{\underline{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underline{\underline{\zeta}}_{ji} \underline{\underline{z}}_{ji} + \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{\omega}}_i \underline{\underline{w}}_i + \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{b}}'_i + \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{\varphi}}_i \underline{\underline{Z}}_i = \max!$$

Mivel a célfüggvényben szereplő két utolsó összeg nem tartalmaz központi változót, a szektorok meghatározzák ugyan lépésenként a $\underline{\underline{\sigma}}_i^{(N)}$ és $\underline{\underline{\varphi}}_i^{(N)}$ árnyékárakat is, de ezeket nem közepelik és nem küldik fel a központnak. Maga a /6.185/-/6.188/ feladat az iteráció N -edik szakaszában az alábbi részekre bomlik:

a/ A t e r m é k e k b i z t o s i t á s a é s f e l o s z t á s a . Az i -edik termékre a t -edik időpontban:

/6.189/ $$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} z_{jit} + Q_{it} = z_{it} \leq Z_{it}$$

/6.190/ $$z_{jit} \geq 0\,, \quad z_{it} \geq 0 \qquad (j \neq i)$$

/6.191/ $$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \zeta^{*}_{jit}\{N-1\}\, z_{jit} - \rho^{*}_{it}\{N-1\}\, z_{it} = \max!$$

Átalakitással:

/6.192/ $$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} z_{jit} \leq Z_{it} - Q_{it}$$

/6.193/ $$z_{jit} \geq 0 \quad (j \neq i)$$

/6.194/ $$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\zeta^*_{jit}\{N-1\} - \varrho^*_{it}\{N-1\})\, z_{jit} = \max!$$

Rendezzük növekvő sorba a $\zeta^*_{1it}\{N-1\}, \dots, \zeta^*_{i-1,i,t}\{N-1\}$, $\zeta^*_{i+1,i,t}\{N-1\}, \dots, \zeta^*_{nit}\{N-1\}$ árnyékárakat és jelöljük $m^*_{it}\{N-1\}$ -gyel azon szektorok számát, amelyeknek j indexére

/6.195/ $$\zeta^*_{jit}\{N-1\} = \max_{h\neq i} \zeta^*_{hit}\{N-1\} = \bar{\zeta}^*_{it}\{N-1\}$$

áll fenn. A fenti feladat megoldása ekkor

1/ a $\bar{\zeta}^*_{it}\{N-1\} < \varrho^*_{it}\{N-1\}$ esetben

/6.196/ $$z^{(N)}_{it} = Q_{it}, \quad z^{(N)}_{jit} = 0, \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

2/ a $\bar{\zeta}^*_{it}\{N-1\} > \varrho^*_{it}\{N-1\}$ esetben egy lehetséges megoldás+/ a következő:

+/ Ha $m^*_{it}\{N-1\} = 1$, a megoldás egyértelmü. Egyébként a maximális árnyékáru szektorok között tetszőlegesen lehet $Z_{it} - Q_{it}$ értékét elosztani. Itt egyenletes elosztást adunk.

/6.197/ $$z_{it}^{(N)} = Z_{it}\,,\; z_{jit}^{(N)} = \begin{cases} \dfrac{Z_{it} - Q_{it}}{m_{it}^{*}\{N-1\}}, & \text{ha } \zeta_{jit}^{*}\{N-1\} = \bar{\zeta}_{it}^{*}\{N-1\} \\ 0\,, & \text{ha } \zeta_{jit}^{*}\{N-1\} < \bar{\zeta}_{it}^{*}\{N-1\} \end{cases}$$

3/ A $\bar{\zeta}_{it}^{*}\{N-1\} = \rho_{it}^{*}\{N-1\}$ esetben bármelyik számitás megoldásra vezet.

b/ A m u n k a e r ő f e l o s z t á s a . A t -edik időpontban

/6.198/ $$\sum_{i=1}^{n} w_{it} = W_t$$

/6.199/ $$w_{it} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

/6.200/ $$\sum_{i=1}^{n} \omega_{it}^{*}\{N-1\}\, w_{it} = \max!$$

Ha $n_t^{*}\{N-1\}$ jelenti azon szektorok számát, amelyeknek i indexére

/6.201/ $$\omega_{it}^{*}\{N-1\} = \max_{1 \leq j \leq n} \omega_{jt}^{*}\{N-1\} = \bar{\omega}_t^{*}\{N-1\}$$

áll fenn, akkor egy megoldás /vö. az előző lábjegyzettel/:

/6.202/ $$w_{it}^{(N)} = \begin{cases} \dfrac{W_t}{n_t^{*}\{N-1\}}\,, & \text{ha } \omega_{it}^{*}\{N-1\} = \bar{\omega}_t^{*}\{N-1\} \\ 0 & \text{ha } \omega_{it}^{*}\{N-1\} < \bar{\omega}_t^{*}\{N-1\} \end{cases}$$

A fenti programozások elvégzése után /minden termék biztositására és elosztására, továbbá a munkaerő elosztására minden időpontban/ rátérhetünk az iteráció N -edik szakaszának II. lépésére.

II. A szektoroknak leküldendő uj központi program elkészitése /a korábbi központi program korrigálása/

A /6.77/ képlet alkalmazásával az uj központi program komponenseire:

/6.203/
$$z^*_{it}\{N\} = \frac{z^{(1)}_{it} + \dots + z^{(N)}_{it}}{N} = \frac{N-1}{N} z^*_{it}\{N-1\} + \frac{1}{N} z^{(N)}_{it}$$
$$i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T$$

/6.204/
$$z^*_{ijt}\{N\} = \frac{z^{(1)}_{ijt} + \dots + z^{(N)}_{ijt}}{N} = \frac{N-1}{N} z^*_{ijt}\{N-1\} + \frac{1}{N} z^{(N)}_{ijt}$$
$$j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T$$

/6.205/
$$w^*_{it}\{N\} = \frac{w^{(1)}_{it} + \dots + w^{(N)}_{it}}{N} = \frac{N-1}{N} w^*_{it}\{N-1\} + \frac{1}{N} w^{(N)}_{it}$$
$$i = 1, \dots, n \quad t = 1, \dots, T$$

A fentiek elkészitése után a $z^*_{it}\{N\}$, $z^*_{i1t}\{N\}, \dots, z^*_{i,i-1,t}\{N\}$, $z^*_{i,i+1,t}\{N\}, \dots, z^*_{int}\{N\}$ és $w^*_{it}\{N\}$ uj központi programokat $(t = 1, \dots, T)$ leküldjük az i -edik szektornak $(i = 1, \dots, n)$.

III. Az uj központi program szektoronkénti értékelése

Az i -edik szektorban megoldják a /6.146/–/6.148/ duális feladatokat az uj célfüggvénnyel. A feladat részletesen kiirva: a ρ_{it}, ζ_{ijt} $(j = 1, \dots, n,\ j \neq i)$, ω_{it}, φ_{it} $(t = 1, \dots, T)$ és σ_{is} $(s = 1, \dots, m'_i)$ árnyékárváltozókkal:

$$\left.\begin{array}{lll} /6.206/ & \rho_{it} - \varphi_{it} \leq c_{i\varrho t} & \\ /6.207/ & \rho_{it} - \varphi_{it} - \sum_{s=1}^{m'_i} a'_{iskt}\sigma_{is} \leq -c_{ikt} & (k = imp) \end{array}\right\} t = 1, \dots, T$$

$$/6.208/ \quad \rho_{it} - \varphi_{it} + \sum_{s=1}^{m_i'} a'_{iskt}\sigma_{is} \geq c_{ikt} \qquad (k = \text{exp}) \qquad t = 1,\dots,T$$

$$/6.209/ \quad \rho_{it} - \varphi_{it} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} g_{ijkt}\zeta_{ijt} - h_{ikt}\omega_{it} - \sum_{s=1}^{m_i'} a'_{iskt}\sigma_{is} \leq - c_{ikt} \qquad (k = \text{repr}) \quad t = 1,\dots,T$$

$$/6.210/ \quad \sum_{t=1}^{T}\Big\{ f_{ikt}(\rho_{it} - \varphi_{it}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} g_{ijkt}\zeta_{ijt} - h_{ikt}\omega_{it} - \sum_{s=1}^{m_i'} a'^{inv}_{isk}\sigma_{is}\Big\} \leq - c^{inv}_{ik} \qquad (k = \text{inv})$$

$$/6.211/ \quad \rho_{it} \geq 0, \quad \varphi_{it} \geq 0, \quad \zeta_{ijt} \geq 0 \ (j \neq i), \quad \omega_{it} \geq 0 \qquad (t=1,\dots,T); \ \sigma_{is} \geq 0 \ (s=1,\dots,m_i')$$

$$/6.212/ \quad \sum_{t=1}^{T}\Big\{ -z^*_{it}\{N\}\rho_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} z^*_{ijt}\{N\}\zeta_{ijt} + w^*_{it}\{N\}\omega_{it} + Z_{it}\varphi_{it}\Big\} + \sum_{s=1}^{m_i'} b'_{is}\sigma_{is} = \min !$$

Megjegyzendő, hogy az iteráció második szakaszától kezdve ezek a programozások korábbi, azonos /6.206-/6.211/ feltételü programozások korrigálásaiként végezhetők el: szakaszonként esetleg csak egyes célfüggvényegyütthatókban van változás /lásd például: [19] , 95-96. oldalak/.

IV. A központnak felküldendő uj árnyékárrendszerek elkészitése /a korábbi árnyákárrendszer korrigálása/

A szektoroknak a /6.79/-nek és a pont elején mondott megjegyzések figyelembevételével a fent nyert optimális / $^{(N)}$ -nel jelölt/ árnyékárrendszerekkel az előző, / $^*\{N-1\}$ -gyel jelzett/ árnyákárrendszereket az alábbiak szerint kell korrigálniok:

az i -edik szektorban $(i = 1,\dots,n)$

$$/6.213/ \quad \rho^*_{it}\{N\} = \frac{\rho^{(1)}_{it} + \dots + \rho^{(N)}_{it}}{N} = \frac{N-1}{N}\rho^*_{it}\{N-1\} + \frac{1}{N}\rho^{(N)}_{it} \qquad t = 1,\dots,T$$

$$/6.214/ \quad \zeta^*_{ijt}\{N\} = \frac{\zeta^{(1)}_{ijt} + \dots + \zeta^{(N)}_{ijt}}{N} = \frac{N-1}{N}\zeta^*_{ijt}\{N-1\} + \frac{1}{N}\zeta^{(N)}_{ijt} \quad (j \neq i)$$

$$/6.215/ \quad \omega^*_{it}\{N\} = \frac{\omega^{(1)}_{it} + \dots + \omega^{(N)}_{it}}{N} = \frac{N-1}{N}\omega^*_{it}\{N-1\} + \frac{1}{N}\omega^{(N)}_{it}$$

$$t = 1, \dots, T$$

Ezen árnyékárrendszerek felküldése után következhet az $(N+1)$--edik szakasz I. lépése, és igy tovább. Az iteráció leállitásával kapcsolatban a 4. tételt kell felhasználnunk. A szektoronkénti árnyákárrendszerek "egalizálódása" kvalitativ ismérvet nyujt a leállitáshoz, mig a szektorminimumok és a központi maximumok összege közti eltérés a közelités pontosságát kvantitativen jellemzi.

V. A közelités pontosságának vizsgálata

Definiáljuk a szektorminimumoknak a központi programtól függő, illetve nem függő feltételekre eső részeit:

$$/6.216/ \quad \tilde{C}^{(N)}_i = \sum_{t=1}^{T}\Big\{-z^*_{it}\{N\}\,\varphi^{(N)}_{it} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} z^*_{ijt}\{N\}\,\zeta^{(N)}_{ij} + w^*_{it}\{N\}\,\omega^{(N)}_{it}\Big\}$$

$$/6.217/ \quad C'^{(N)}_i = \sum_{t=1}^{T} Z_{it}\,\varphi^{(N)}_{it} + \sum_{s=1}^{m'_i} b'_{is}\,\sigma^{(N)}_{is}$$

$$/6.218/ \quad C^{(N)}_i = \tilde{C}^{(N)}_i + C'^{(N)}_i \ .$$

Ekkor a /6.87/ alatti $C_*\{N\}$ értékre nyilván

$$/6.219/ \quad C_*\{N\} = \sum_{i=1}^{n} C^{(N)}_i \qquad N = 1, 2, \dots$$

A $C_i^{\prime(N)}$ értékekből képezzük a

$$C_i^{\prime *}\{N\} = \frac{C_i^{(1)} + \ldots + C_i^{(N)}}{N} = \frac{N-1}{N} C_i^{\prime *}\{N-1\} + \frac{1}{N} C_i^{\prime(N)} \qquad N = 2,3,\ldots \tag{6.220}$$

és

$$C^{\prime *}\{N\} = \sum_{i=1}^{n} C_i^{\prime *}\{N\} \qquad N = 2,3,\ldots \tag{6.221}$$

mennyiségeket.

Ha δ^+ jelöli a δ szám "pozitiv részét", tehát $\delta^+ = 0$, ha $\delta \geq 0$ és $\delta^+ = 0$, ha $\delta < 0$, akkor a központi maximumok összegére az alábbi képletet nyerjük:

$$C^*\{N\} = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[(\bar{\zeta}_{it}^*\{N-1\} - \rho_{it}^*\{N-1\}]^+ Z_{it} - \rho_{it}^*\{N-1\} Q_{it} \right] + \bar{\omega}_t^*\{N-1\} W_t \right\}. \tag{6.222}$$

Igy a /6.86/ alatti $C^*\{N\}$ értékre

$$C^*\{N\} = \tilde{C}^*\{N\} + C^{\prime *}\{N\} \qquad N = 2,3,\ldots \tag{6.223}$$

Az iteráció minden szakaszában tehát

$$C_*\{N\} \leq C^* \leq C^*\{N\} \qquad N = 1,2,\ldots \tag{6.224}$$

lévén a következőt tehetjük: figyelemmel kisérjük a

$$C^*\{2\} - C_*\{1\}, C^*\{2\} - C_*\{2\}, C^*\{3\} - C_*\{2\}, \ldots,$$

/6.225/

$$\ldots, C^*\{N\} - C_*\{N-1\}, C^*\{N\} - C_*\{N\}, \ldots$$

különbségeket és ha valamelyikük elég kicsiny, abbahagyhatjuk az iterációt és elfogadhatjuk a nyert központi programot és árnyékárrendszert.

Az elfogadott szektorprogramokra való áttérés az iteráció leállitása után a következőképpen történhet: az elfogadott központi programhoz tartozó minimalizálási feladatok szimplex-táblázatából meghatározzuk a primer szektor-feladatok megoldását: a kapott szektorprogramok együttese alkotja a teljes feladat megoldását /lásd: [9] , 6.2. pont/.

Az iteráció leállitásával kapcsolatban még egy problémát emlitünk. A konkrét modellbe bevezetett "szabad import" tevékenységek egy része valójában csak mesterségesen bevezetett segédváltozó, amely a célfüggvénybe beépitett magas negativ együttható miatt előbb-utóbb kiküszöbölődik a programból. Nem célszerü azonban az iteráció során tovább közepelni e segédváltozókból eredő kedvezőtlen értékeket, ehelyett az iterációt két részre lehet bontani. Az első rész addig tart, amig minden mesterséges változó el nem tünik /amig "reális" programra nem jutunk/. A második rész az iterációt most már e programból kiindulva kezdi előlről.

I R O D A L O M :

[1] BLACKWELL, D. - GIRSHICK, M.A.: "Theory of games and statistical decisions." Wiley, New York, 1954.

[2] BROWN, G.W.: "Some notes on computation of games solutions The Rand Corporation D-436, 1949.

[3] BROWN, G.W.: "Iterative solution of games by fictitious play." Activity analysis of production and allocation, ed. T.C. Koopmans, Cowles Comission Monograph No. 13., New York, Wiley, 1951. 374-376.

[4] DANTZIG, G.B. - WOLFE Ph.: "Decomposition principle for linear programs". Operations Research, 8. /1960/: 1, 101-111.

[5] FRISCH, R.: "A Survey of Types of Economic Forecasting and Programming and a Brief Description of the Oslo Channel Model, Memorandum from the Institute of Economics University of Oslo, 1961.

[6] GERŐ MÁRIA: "Az 1965 évi sakktáblamérleg", Közgazdasági Szemle 8. /1960/ 1156-1168.

[7] GOLDMAN, A.J. - TUCKER, A.W.: "Theory of linear programming", Linear inequalities and related systems, ed. H.W.Kuhn and A.W.Tucker, Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton, N.J. 1956. 53-97.

[8] GOLDMAN, A.J.: "Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets". Linear inequalities and related systems, ed. H.W.Kuhn and A.W.Tucker, Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton N.J. 1956. 41-51.

[9] KARLIN, Samuel: Mathematical methods and theory in games, programming, and economics, Vol.I.Matrix games, programming and mathematical economics. Addison-Wesley, Reading /Mass., USA/-London, 1959.

[10] KANTOROVICS, L.V.: Ekonomicseszkij raszcsot nailucssevo iszpolzovanyija reszurszov, Moszkva, Izdatyelsztvo Akadémii Nauk SZSZSZR, 1960.

[11] KORNAI J. - LIPTÁK T. - VIDOS T.: Gazdasági számitás a magyar müszálgyártás fejlesztési programjának meghatározására, sokszorositva, Szerves Vegyipari és Müanyagipari Kutató Intézet, Budapest, 1960.

[12] KORNAI J.: "Egy iparág optimális beruházási tervének meghatározása lineáris programozással", Közgazdasági Szemle, 8/1961/57-585.

[13] KORNAI J.: A központi és ágazati programozások összekapcsolása, kéziratban, Számitástechnikai Központ, 1961.

[14] LERNER, A.P.: The Economics of Controll, MacMillan, New York, 1949.

[15] MARTOS B. - KORNAI J. - NAGY A. - HORVÁTH L. - JESZENSZKY I. - CSÉBFALVI K. - LÁNDORI P.: Első beszámoló a magyar aluminiumipar optimális tervére vonatkozó kutatásról, sokszorositva, MTA Számitástechnikai Központja, Budapest, 1961.

[16] MYCIELSKI, J. - REY, K. - TRZECIAKOWSKI, W.: Disaggregation and Optimization of Short Run Planning in a Planned Economy, sokszorositva, Varsó, 1961.

[17] ROBINSON, J.: "An iterative method of solving a game". Annals of Mathematics 54 /1951/ 296-301.

[18] SIMON Gy. - KONDOR Gy.: A külkereskedelmi kapcsolatok optimalizálása", Közgazdasági Szemle, 7 /1960/ 822-839.

[19] SUZUKI, Yukio: "Note on linear programming" Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 10 /1959/: 2, 89-105.

[20] TRZECIAKOWSKI, W.: The Modell of Optimization of Foreign Planned Economy and its Applications, sokszorositva, Varsó, 1961.

[21] WOLFE, Ph.: "Determinateness of polyhedral games", Linear inequalities and related systems, ed. H.W.Kuhn and A.W.Tucker, Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton, N.J. 1956. 195-198.